

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

49. Band, Heft 7

30. April 1959

S. 289—478

## Geschichte.

• Sarton, George: *Horus—a guide to the history of science*. Waltham, Mass.: Chronica Botanica Co. 1952. XVII, 316 p. \$ 7,50.

Schmidt, Olaf: *On the computation of the ahargana*. Centaurus 2, 140—180 (1952).

Das Ahargana dient in der Hindu-Astronomie zur Aufsuchung der mittleren Positionen von Sonne, Mond und den Planeten. Es bedeutet die Anzahl der seit einer gewissen Epoche verfloßenen mittleren Sonnentage und muß im allgemeinen aus dem Datum des Lunisolarkalenders, der auf fiktiven Mondtagen (Tithis) beruht, eigens berechnet werden. Verf. erläutert die komplizierten Zusammenhänge an Hand einer graphischen Darstellung und diskutiert die wichtigsten der überlieferten Regeln. Dabei zeigt sich, daß diese Regeln in der Umgebung eines Schaltmonats ein um 30 Mondtage zu großes Ahargana liefern. — Für die Berechnung der auftretenden Quotienten von großen Zahlen sind verschiedene Näherungsmethoden überliefert, die sich, wie aus Hinweisen von al-Birûnî geschlossen werden kann, aus folgender Stürzung ergeben: Wenn  $b:a = q + r/a$  ( $b > a$ ), so folgt  $a/b = (1/q)(1 - r/b)$ . Diese Formel konnte leicht mittels korrespondierender Subtraktion gewonnen werden.

H. Hermelink.

Spasskij, I. G.: *Herkunft und Geschichte des russischen Rechenbrettes*. Istoriiko-mat. Issledovanija 5, 269—420 (1952) [Russisch].

Die Arbeit gibt einen ausführlichen, durch Quellenangaben und Abbildungen vorzüglich belegten Überblick über erstes Auftreten und Entwicklung des instrumentalen Rechnens in Rußland, wo wegen des späten Eindringens der indischen Ziffern und Methoden solche Hilfsmittel für Haushalt, Handel und Wirtschaft von besonderer Bedeutung waren. Es sei dazu bemerkt, daß auch bei uns aus demselben Grund und wegen des Analphabetentums weiter Kreise (die doch auch rechnen mußten) das Abakusrechnen sich viel länger halten konnte als in Italien, wo mit Leonardo von Pisa die neuen Methoden Eingang gefunden hatten. — Nach einem einleitenden Überblick (Kap. 1) behandelt der Verf. (Kap. 2) die Zeit vor dem Bekanntwerden der indischen Ziffern und hebt unter seinen Quellen die „Rechenweise“ hervor, die in zahlreichen Abschriften des 17. Jhdts vorliegt, in denen auch die instrumentalen Methoden beschrieben werden. Die eine von ihnen, „Das Rechnen mit Knöpfen“ (Kap. 3) entspricht ganz dem abendländischen Rechnen auf den Linien. Verf. behandelt hier auch ähnliche Instrumente (in Griechenland, Rom, China, Japan und im Iran); ihnen allen ist ein Fortschreiten in Fünferschritten gemeinsam (beim Linienrechnen wird 1 Rechenstein im Wert von 5 zwischen die Einer- und Zehnerlinie gelegt). Trotz der fast wörtlichen Übereinstimmung der Beschreibung des „Knopfrechnens“ mit der in den Büchern über das Linienrechnen (und, wie hier bemerkt sei, in bayrischen Klosterhandschriften aus der Mitte des 15. Jhdts) möchte der Verf. entgegen der Ansicht Bobynins nicht den Weg nach Rußland über Byzanz oder Novgorod annehmen; er sieht nur die Tatsache, daß die abendländische Methode dem russischen Autor bekannt war. — Zweifelloos russischen Ursprungs ist eine Variante, die „Brettrechnen“ heißt; hier sind der Fünferschritt weggefallen und die freien Rechensteine durch 10 bzw. 9 Knöpfe ersetzt, die in einem Doppelrahmen auf Fäden oder Drähten aufgezogen sind wie in unserer Schulrechenmaschine, die übrigens Poncelet nach 1812 aus russischer Gefangenschaft als „boullier“ nach Metz mitbrachte. Eine weitere Variante (Kap. 5) sind die „Rechenbrettchen“, auf denen mit Brüchen bis zu  $\frac{1}{2^7}$  und  $\frac{1}{3 \cdot 2^n}$  ( $n = 0$  bis 5) gerechnet werden kann, was für das Rechnen im russischen Münzsystem von Wichtigkeit war (es galt 1 Altyn = 3 Kopeken = 6 Denga) — Verf. behandelt dann die Geschieke der Recheninstrumente im 17.—19. Jhd. (Kap. 6), ferner (Kap. 7) Entstehung und



Ursache der Veränderungen des „Brettrechnens“ im Zusammenhang mit dem wirtschaftlichen Aufschwung (seit Peter I wurde das dekadische Münzsystem eingeführt) und schließlich (Kap. 8) die Weiterentwicklung im 19. und 20. Jhdt. bis zur Rechenmaschine. In einem letzten Kapitel wendet sich der Verf. gegen die Legende vom chinesischen Ursprung des russischen instrumentalen Rechnens. *K. Vogel.*

**Conte, Luigi:** G. Bernoulli, G. C. de Toschi di Fagnano e la sfida di Brook Taylor. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 36—53 (1949).

Schon im Frühjahr 1702 hatte Joh. Bernoulli den Typus der Integrale aus rationalen Funktionen richtig erkannt. Als nun Taylor 1719 mit spitzem Ausfall gegen Leibniz, der sich bei Integration von  $dx/(a^4 + x^4)$  geirrt hatte, die Integration von  $x^{kn-1} dx/(a x^{3n} + b x^{2n} + c x^n + e)$  forderte, hatte Bernoulli (Sommer 1719) leichtes Spiel. Anschließend behandelte G. C. Fagnano 1720 das Integral von  $x^p dx/(x^{2n} + a x^n \pm b^{2n})$  eingehender. Verf. schildert die Einzelheiten im Anschluß an die Opera von Bernoulli und Fagnano, ohne jedoch die ebenfalls gedruckten und aufschlußreichen Briefe von 1720 zwischen Leibniz und Bernoulli zu erwähnen. *J. E. Hofmann.*

● **Taton, René:** La géométrie projective en France de Desargues à Poncelet. (Les conférences du Palais de la découverte. Sér. D, 32.) Paris: Université de Paris 1951. 21 p.

**Fichera, Gaetano:** Cenni sui problemi di analisi matematica contemporanea. I. Produzione italiana nel campo dell'analisi matematica durante il periodo 1940—1945. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 63—107 (1949).

**Delone, B. N.:** Wege der Entwicklung der Algebra. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 3 (49), 155—178 (1952) [Russisch].

Vortrag auf einer Konferenz über Algebra und Zahlentheorie im September 1951 in Moskau. In einem geschichtlichen Überblick wird geschildert, wie sich der Begriff der Algebra seit Vieta und Descartes gewandelt hat. Ferner werden die Stellung der Algebra innerhalb der modernen Mathematik und ihre Beziehungen zu den Anwendungen behandelt. Schließlich werden Forschungsrichtungen angedeutet, in denen eine erfolgreiche Weiterentwicklung zu erhoffen ist. Eine Anzahl von Diskussionsbeiträgen ergänzt die Ausführungen des Verf.. Deutsche Übersetzung in Sowjetwissenschaft, Naturwiss. Abt., 1953, 115—133 (1953). *R. Kochendörffer.*

**Norden, A. P.:** 125 Jahre Niehteuklidische Geometrie. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 13—22 (1952) [Russisch].

**Laptev, B. L.:** Leben und Wirken N. I. Lobačevskijs. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 23—33 (1952) [Russisch].

**Rybkin, G. F.:** N. I. Lobačevskijs Weltanschauung. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 43—60 (1952) [Russisch].

Wiederabdruck der in diesem Zbl. 54, 3 angezeigten Artikel.

● **Gnedenko, B. V.:** Michail Vasilevič Ostrogradskij. Abriß seines Lebens, seines wissenschaftlichen Werkes und seiner pädagogischen Tätigkeit. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 332 S. R. 8,40 [Russisch].

In diesem Buch wird zunächst (S. 9—84) das Leben des bedeutenden russischen Mathematikers und Mechanikers Ostrogradskij (1801—1862) dargestellt. Dann (S. 87—178) wird seine wissenschaftliche Tätigkeit in der Mechanik, mathematischen Physik, mathematischen Analysis und Algebra beschrieben. Besonders beachtenswert in diesem zweiten Teil ist das Kapitel VII, wo gut begründet gezeigt wird, daß Ostrogradskij als Begründer der russischen wissenschaftlichen Schule der Mechanik betrachtet werden kann, zu der unter vielen anderen auch Žukovskij, Čaplygin, Bobil'ev, Ljapunov und Krylov gehören und die sich in unserer Zeit in die bekannte mächtige russische Mechanikschule entwickelt hat. Ebenso ausführlich wird seine Lehrtätigkeit in verschiedenen Schulen (S. 181—263), hauptsächlich in militärischen und pädagogischen Schulen, geschildert. Aus dieser Schilderung wird klar, daß sein Einfluß auf alle Unterrichtsfragen bedeutend war, selbst auf den Unterricht an den Universitäten, wo er nicht gelesen hat. Als Abschluß wird (S. 264—270) seine Einstellung zu gewissen Fragen der Philosophie und der Weltanschauung gegeben. Das Buch enthält ein Verzeichnis seiner meist französisch verfaßten und in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie der Wissenschaften



erschienenen Arbeiten. Auch die russische Übersetzung aus dem Französischen und drei seiner, nach Meinung des Verf., bedeutendsten Beiträge ist beigelegt, darunter auch der berühmte Beitrag „Note sur la théorie de la chaleur“, welche der Petersburger Akademie im Jahre 1828 vorgelegt wurde und wo sich ganz allgemein der heute gewöhnlich nach Gauß benannte Integralsatz befindet und den Ostrogradskij unabhängig von Gauß gefunden hat. Die Frage der Priorität der Entdeckung dieses Satzes wird ohne jede Einseitigkeit und Übertreibung behandelt. Der Verf. behauptet dabei, daß die ersten Veröffentlichungen von Gauß, die sich auf diesen Satz beziehen, nicht allgemein waren und daß die erste allgemeine Fassung erst in dieser Arbeit von Ostrogradskij zu finden ist. Es ist vielleicht interessant zu bemerken, daß sich zu Gauß und Ostrogradskij mit Anspruch auf diesen Satz auch der englische Forscher Green gesellte, und es gab eine Zeit, etwa um die Jahrhundertwende, wo die Franzosen diesen Integralsatz nach Ostrogradskij nannten, die Deutschen nach Green und die Russen nach Gauß. Dieses Buch verdient in seiner Art meiner Meinung nach jede Beachtung. Erstens, weil es eine gute Schilderung des Lebens und Schaffens eines bedeutenden Mathematikers ist; und zweitens als aufschlußreich in bezug auf die Fragen der Entwicklung der russischen Mechanikschule, deren Bedeutung nicht zu unterschätzen ist. Es ist mit sechs Aufnahmen versehen und technisch sehr gut ausgestattet.

T. P. Angehlich.

● Casorati, Felice: *Opere Vol. I. II.* Roma: Edizione Cremonese della Casa ed.

Perrella, 1951, 1952. XIII, 420; 294 p.

Die Ausgabe erfolgte mit Unterstützung der Universität Pavia durch die Unione Matematica Italiana. An der Ausgabe beteiligten sich: Luigi Berzolari, Enrico Bompiani, Luigi Brusotti, Gino Cassinis, Silvio Cinquini, Giovanni Sansone. Sämtliche Veröffentlichungen — sie umfassen die Zeitspanne von 1856 bis 1890 — mit Ausnahme des Lehrbuches *teorica delle funzioni di variabili complesse I*, 1868, sind wieder abgedruckt. Hinzu kommen weitere nicht veröffentlichte Schriften. Der Wiederabdruck der Publikationen geschieht in 6 Gruppen: 1. Reden, 2. Geodäsie, 3. Funktionen komplexer Veränderlichen, 4. Differentialgleichungen, 5. Geometrie, 6. Sonstiges. Der größte Teil der Arbeiten betrifft bekanntlich die Funktionentheorie. Er spiegelt natürlich die klassische Zeit der Entwicklung der Funktionentheorie einer Veränderlichen sehr gut wieder.

Sakellariou, Nilos: Constantin Carathéodory. Bull. Soc. math. Grèce 26, 1—13 (1952) [Griechisch].

Lebenslauf und ausführliche Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen Carathéodorys sowie Herausstellung seiner Bedeutung für die griechischen Mathematiker.

O. Volk.

Turnbull, H. W.: D'Arcy Wentworth Thompson. 1860—1948. Edinburgh math. Notes 38, 17—18 (1952).

Aitken, A. C.: J. H. MacLagan Wedderburn. 1882—1948. Edinburgh math. Notes 38, 19—22 (1952).

Turnbull, H. W.: John Williamson. 1901—1949. Edinburgh math. Notes 38, 23—24 (1952).

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● Poincaré, H.: *Science and hypothesis*. With a preface by J. Larmor. New York: Dover Publications, Inc. 1952. XXVII, 244 p. \$ 1,25.

Neudruck der erstmals 1905/07 erschienenen englischen Übersetzung des Werkes „La science et l'hypothèse“ (Paris 1902/07). Vorangestellt ist wieder die Einführung von J. Larmor.

● Poincaré, Henri: *Science and method*. Transl. by Francis Maitland. With a preface by Bertrand Russell. New York: Dover Publications, Inc. 1952. 288 p. \$ 1,25.

Vollständige englische Übersetzung von „Science et méthode“ (Paris 1908). Von B. Russell sind lediglich wenige Zeilen auf dem Einbanddeckel abgedruckt.

Pólya, G.: *On plausible reasoning*. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 739—747 (1952).

Diskussion nicht-demonstrativer Begründungen von mathematischen Ver-



mutungen an Beispielen (zahlen- und funktionen-theoretische Vermutungen von Euler, isoperimetrisches Problem). Verf. betont den heuristischen und den pädagogischen Wert („Let us teach guessing!“) und kommt trotz des notwendigerweise subjektiven Charakters solcher Betrachtungen zu einer Reihe von aussagenlogischen Figuren des plausiblen Schließens, welche im wesentlichen darauf beruhen, daß ein Verstoß gegen eine vermutete Gesetzmäßigkeit sich im allgemeinen in einem vorläufigt gewählten Vorrat von Beispielen zeigen würde. Vgl. auch die in diesem Zbl. 34, 155 besprochenen Arbeiten des Verf's.

G. Hasenjaeger.

• Linsky, Leonhard (edited by): *Semantics and the philosophy of language. A collection of readings.* Urbana: The University of Illinois Press 1952. VIII, 289 p.

Polvani, Giovanni: *I fondamenti concettuali e teorici della metrologia fisica.* Rend. Sem. mat. fis. Milano 22, 108—150 (1952).

Diese Arbeit des Verf. hat den Zweck, die allgemeinen erkenntnis-theoretischen Überlegungen darzulegen, die in der Physik zur Einführung und Messung von bestimmten Größen führen. Sie gibt die gedanklichen und theoretischen Grundlagen der physikalischen Meßkunde.

A. Defant.

• Törnebohm, Håkan: *A logical analysis of the theory of relativity.* Stockholm: Almqvist & Wiksell 1952. 273 p. Sw. Cr. 25.

Sobociński, Bolesław: *Axiomatization of a partial system of three-value calculus of propositions.* J. comput. Systems 1, 23—55 (1952).

$C$  sei das Implikations-,  $N$  das Negationssymbol,  $\mu$  die folgende dreiwertige Matrix in  $C$  und  $N$

$C$	0	1	2	$N$
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
2	0	1	2	2

mit den ausgezeichneten Werten 1 und 2,  $M$  die Erfüllungsmenge von  $\mu$ .  $M$  ist ein beträchtliches Teilstück der Satzmenge des vollen  $C$ - $N$ -Kalküls (siehe unten) und dadurch ausgezeichnet, daß die  $C$ - $N$ -Sätze, an denen im Sinne des inhaltlichen Denkens Anstoß genommen werden kann, bis auf wenige Ausnahmen in  $M$  nicht vorkommen (siehe unten). Also ein System der materialen Implikation, das nahezu frei ist von den Schönheitsfehlern des vollen Systems. Es wird gezeigt, daß  $M$  axiomatisiert werden kann durch ein fünfzähliges Axiomensystem  $S$  mit  $S1$ .  $CCpqCCqrCp$ ,  $S2$ .  $CpCCpq$ ,  $S3$ .  $CCpCpqCp$ ,  $S4$ .  $CpCqCNqp$ ,  $S5$ .  $CCNpNqCq$ .

Der Beweis ist nicht trivial. Der Vorbereitung des Beweises dient unter Voraussetzungen der Einsetzungs- und der Abtrennungsregel in § 1 die Ableitung von 182 Sätzen, in denen die 55 Sätze enthalten sind, auf die hernach Bezug genommen wird. Es folgt der Beweis für die semantische Vollständigkeit von  $S$ ; denn sonst müßte es einen kürzesten Ausdruck geben, der  $\mu$  erfüllt, aber aus  $S$  nicht ableitbar ist. Diese Annahme wird in einer unvermeidlich subtilen Diskussion in § 2 (pp. 32—45) zu einem Widerspruch geführt. § 3 enthält die matrizenlogischen Beweise für die Unabhängigkeit von  $S$ , § 4 einige wesentliche Zusätze, insbesondere zu den Beziehungen des vorliegenden Systems zu dem Lewis-System der strict implication, zu dem dreiwertigen System von J. Lukasiewicz und dem weak positive implicational propositional calculus von A. Church, der sich als ein Teilsystem des Systems von Sobociński erweist. Dazu das wichtige Theorem 4.1. Es besagt, daß dieses System durch Hinzufügung eines beliebigen Satzes des vollen  $C$ - $N$ -Kalküls, der  $\mu$  nicht erfüllt — Beispiel:  $CpCNpq$  — zu einem vollen  $C$ - $N$ -Kalkül ergänzt wird. Endlich in 4.6 die Definierbarkeit des Konjunktions-, des Alternativ- und des Äquivalenzsymbols nach dem klassischen Muster durch  $Kpq =_{\text{df}} NCpNq$ ,  $Apq =_{\text{df}} CNpq$ ,  $Epq =_{\text{df}} KCpqCp$ . Es folgen die vier „anstößigen“ Sätze des Systems — Beispiel:  $CNCpqCpq$  — und die vier ausgezeichneten klassischen Sätze, die dem System nicht angehören. Beispiele:  $CKpq$  und  $CpApq$ .

Eine nicht leicht zu lesende, aber ungewöhnlich gehaltreiche Studie. Die Anforderungen an den Leser werden durch die vorbildliche Darstellungsart der Warschauer Schule auf ein Mindestmaß herabgedrückt.

Dreben, Burton: *On the completeness of quantification theory.* Proc. natl. Acad. Sci. USA 38, 1047—1052 (1952).

Für den Gödelschen Vollständigkeitssatz wird ein Beweis angegeben, der nicht unmittelbar auf die Skolemsche Normalform zurückgreift. Der Beweis schließt sich im ersten Teile unmittelbar an die Bernaysche Fassung des Herbrandschen Satzes

H. Scholz.



(Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik, dies. Zbl. 9, 145; 20, 193) an; erst im zweiten Teile werden nichtfinite Schlußweisen herangezogen.

*H. Arnold Schmidt.*

**Meredith, G. P.:** The formulation of epistemic relations. Proc. Leeds philos. lit. Soc., sci. Sect. 6, 33—42 (1952).

**Markov, A. A.:** Theorie der Algorithmen. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 176—189 (1951) [Russisch].

Dies ist die erste Skizze der Theorie der Algorithmen (A.) des Verf. Eine spätere ausführliche Darstellung mit vollen Beweisen und Anwendungen (Theorie der Algorithmen, dies. Zbl. 58, 5) wurde hier nur kurz besprochen. Nach Plausibilitätsbetrachtungen mit historischer Motivation (Church, Kleene, Turing und Post sind zitiert) werden zunächst peinlich genau die Grundbegriffe eingeführt: „konkrete“ und „abstrakte“ Buchstaben, Alphabete, Worte (einschl. eines leeren Words) und das „Enthaltensein“ oder „Vorkommen“ und die Substitution von Worten in Worten. Der Begriff des A. wird zu dem des normalen Algorithmus (n. A.) präzisiert: Zu Beginn jedes elementaren Schrittes („lokale Operation“) liegt ein gewisses Wort  $Q_i$  vor. Aus der geordneten Liste von Formeln der Form  $A \rightarrow B$  („A wird B“, d. h. Substitution von B an Stelle von A, wo A, B verschiedene Worte — das leere nicht ausgeschlossen — im gegebenen Alphabet sind; „ $\rightarrow$ “ gehört nicht zum Alphabet) wird die erste auf  $Q_i$  anwendbare Formel an der ersten möglichen Stelle von  $Q_i$  angewendet (d. h. wenn A mehrmals in  $Q_i$  vorkommt, möglichst weit links). Man erhält so  $Q_{i+1}$ . Ausgehend von  $Q = Q_0$  verwandelt so der n. A.  $\mathfrak{A}$  in eindeutig bestimmter Weise  $Q$  in  $Q_n = \mathfrak{A}(Q)$ , wenn er nach  $n$  Schritten abbricht, d. h. wenn keine Operation (Substitution) von  $\mathfrak{A}$  mehr auf  $Q_n$  anwendbar ist. Abbrechen kann ev. durch Einführung eines zweiten Typs elementarer Operationen, „ $\rightarrow$ “, erzwungen werden: „ $A \rightarrow B$ “ bedeute, daß mit der Anwendung der Substitution  $A \rightarrow B$  der Prozeß enden soll. Die Benutzung von Variablen für Buchstaben wird illustriert. Verf. sieht die wichtigste, pragmatische Rechtfertigung der n. A. darin, daß alle bisher in der Mathematik verwendeten A. „normalisiert“ werden können. Ein allgemeiner, mathematisch exakter Beweis ist infolge der Vagheit des allgemeinen Begriffs des A. natürlich unmöglich. Die Nützlichkeit der n. A. wird weiterhin durch verschiedene Sätze über n. A. und Normalisation gewisser nichtnormaler A. erhärtet (ohne Beweise). Verf. betrachtet jedoch nicht die Äquivalenz seines Verfahrens mit denen anderer Autoren, insbesondere auch nicht mit den Maschinen von Turing (T. M.), denen die n. A. sehr ähneln. Verf. betrachtet noch „Übersetzungen“ in andere, insbesondere zweibuchstabige Alphabete und die Herstellung von „Kennworten“  $\mathfrak{A}$  (im zweibuchstabigen Standardalphabet  $\mathfrak{A}^*$ ), die mit Hilfe eines gewissen Kodes in einem einzigen Wort den n. A.  $\mathfrak{A}$  vollkommen charakterisieren. Die Existenz sogenannter „universeller“ n. A.  $\mathfrak{U}$  oder  $\mathfrak{F}$  wird behauptet. [Druckfehler: Im Theorem auf Seite 185 unten wird der universelle n. A. irrtümlich ebenfalls mit  $\mathfrak{A}$  bezeichnet.] Diese haben die Eigenschaft, daß sie für alle n. A.  $\mathfrak{A}$  und alle Worte  $P$  über ein gewisses Alphabet mit  $\mathfrak{A}(P)$  gleichwertige Resultate ergeben, wenn man sie auf  $\mathfrak{A} \delta P$ , bzw.  $\mathfrak{A}^* \delta P$ , anwendet:  $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^* \delta P) \approx \mathfrak{A}(P)$  ( $\delta$  ist ein Trennungssymbol „ad hoc“). Die ev. Anwendbarkeit von n. A. auf ihr eigenes Kennwort legt die Verwendung des Kantorschen Diagonalverfahrens nahe und führt zu Erkenntnissen über Unentscheidbarkeit von Problemen, die denen von Turing vollkommen analog sind. [Bem. d. Ref.: Die n. A. von Markov unterscheiden sich von den T. M. dadurch, daß erstere grade „gut“ sind, wenn sie abbrechen, dagegen letztere nur, wenn sie nicht abbrechen. Das rührt daher, daß Markov von vornherein Wortprobleme im Sinne hat, während die T. M. ursprünglich für die Herstellung „berechenbarer“, reeller Zahlen in üblicher Darstellungsweise (binäre oder dezimale Entwicklung) konstruiert ist und nur durch modifizierende Kunstgriffe auf Wortprobleme anwendbar wird.]

*D. Tamari.*



## Algebra und Zahlentheorie.

● **Andreoli, Giulio:** *Lezioni di matematiche superiori. I.* Napoli-Roma-Milano: Istituto Editoriale del Mezzogiorno 1952. 107 p.  
Besprechung in diesem Zbl. 55, 6.

### Kombinatorik:

**Waterson, A.:** On the sum of the  $r$ -th powers of the first  $n$  integers. Edinburgh math. Notes 38, 9–13 (1952).

It is proved

$$1^r + \dots + (n-1)^r = \sum_{k=0}^r (-1)^k n^{r+1-k} \begin{vmatrix} 1/2! & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/3! & 1/2! & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/(k+1)! & 1/k! & \dots & 1/2! \end{vmatrix}.$$

The evaluation of  $(h+1)^i - h^i$  by means of the binomium of Newton is summed up for  $h = 1, \dots, n$ . From these identities for  $i = 1, \dots, r$  the sum  $1^r + \dots + n^r$  is obtained as a determinant. This is transformed to the relation above, which is of course equivalent to the well-known result in terms of Bernoulli's numbers.

W. Verdenius.

**Tallqvist, Hj.:** Produktsummen der ganzen Zahlen. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 16, Nr. 5, 5 S. (1952).

Für die Summen der als Produkte aufgefaßten Kombinationen der Klasse  $k = 2, 3, 4$  mit und ohne Wiederholung (die Aleph- bzw. elementarsymmetrischen Funktionen, beide auch Fakultätskoeffizienten genannt) der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  sowie für die Summen der Kombinationen der Formen  $a^2 b, a^3 b, a^2 b^2, a^2 bc$  werden Polynome in  $n$  und Tabellen bis  $n = 12$  aufgestellt. Polynome für die Fakultätskoeffizienten sind seit langem bekannt. Auch Tabellen hierfür findet man z. B. schon bei A. von Ettingshausen [Die combinatorische Analysis, Wien 1826, S. 296 bis  $n = 8$ ,  $k = 6$  bzw. S. 291 bis  $n = 9$ ,  $k = 9$ ]. — In den Tabellen des Verf. für die Alephfunktion muß stehen bei  $k = 3, n = 9$ : 22275 und bei  $k = 4, n = 2$  bzw. 4: 31 bzw. 1701. Verf. hat übersehen, daß die Alephfunktion für  $k = 4$  auch noch durch  $(n+2)(n+3)(n+4)$  teilbar ist.

E. Schönhardt.

### Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

● **Stoll, R. R.:** Linear algebra and matrix theory. (Internat. Series in Pure and Appl. Mathematics.) New York: McGraw-Hill Book Co. 1952. \$ 6,00.

**Marinescu, G.:** Espaces vectoriels ordonnés ayant les coefficients dans une algèbre. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Ştii. Natur. 1, Nr. 11, 17–19, russ. u. französ. Zusammenfassg. 19 (1952) [Russisch].

Dans cette note l'A. expose quelques remarques sur certaines algèbres ordonnées. Il remarque en particulier que si l'on introduit dans l'espace des suites  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  de nombres réels la relation d'ordre  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \geq y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$  si  $x_i \geq y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et la multiplication  $x \cdot y = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \cdot (y_i)_{1 \leq i \leq n} = (\sum_{h,k=1}^n c_{hki} x_h y_k)_{1 \leq i \leq n}$ , alors  $x > 0$  et  $y > 0$  impliquent  $x \cdot y > 0$  si et seulement si  $c_{hki} \geq 0$  [et  $\sum_{j=1}^n c_{hkj} \neq 0$ ] ( $1 \leq h, k, i \leq n$ ).

C. T. Ionescu Tulcea.

**Leavitt, W. G.:** Mappings of vector spaces and the theory of matrices. Amer. math. Monthly 59, 219–222 (1952).

Ein Satz von Frobenius über den Rang des Produktes zweier Matrizen wird bewiesen, indem man eine Matrix als einen Endomorphismus eines Vektorraumes ansieht. Es ist ein Beispiel für die Einfachheit dieser schon üblich gewordenen Methoden.

K. Shoda.

**Vivier, Marcel:** Note sur les matrices extérieurement équivalentes. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2327–2329 (1952).

Zwei Matrizen  $\theta, \theta_1$  vom Typus  $(p, q)$  heißen außenäquivalent, wenn  $(I_p \theta) = \zeta (I_p \theta_1) T$ , wo  $I_p$  die Einheitsmatrix des Grades  $p$ ,  $\zeta$  eine nichtsinguläre Matrix



und  $T$  eine Permutationsmatrix sind. Gewisse Beziehungen zwischen zwei außen-äquivalenten Matrizen werden erhalten. Außerdem leitet der Verf. zwei sogenannte charakteristische Matrizen aus  $\theta, \theta_1$  ab, die auch außen-äquivalent sind. *K. Shoda.*

**Bergström, Harald:** A triangel-inequality for matrices. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 264—267 (1952).

$A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{ij})$  seien reelle symmetrische Matrizen,  $A_{ii}$  (bzw.  $B_{ii}$ ) sei die Adjungierte zu  $a_{ij}$  ( $b_{ij}$ ). Für ein festes  $i$  sei die der Matrix  $A_{ii}$  entsprechende Form positiv definit und für alle Eigenwerte  $\lambda$  der Matrix  $A_{ii}^{-1} B_{ii}$  gelte  $(1/|\lambda + 1|) > 0$ . Dann besteht die Ungleichung

$$(2) \quad \|A + B\| \|A_{ii} + B_{ii}\| \geq \|A\| \|A_{ii}\| + \|B\| \|B_{ii}\|.$$

Vertauscht man in Ungleichung (1) die rechte mit der linken Seite, so wird (2) mit gleichfalls vertauschten Seiten richtig. Bezüglich der Anwendung auf Verteilungsfunktionen im  $k$ -dimensionalen Raum vgl. Verf. dies. Zbl. 41, 452. *F. Dueball.*

**Brödel, E.:** Eine funktionentheoretische Behandlung der kubischen Gleichung. Wiss. Z. Friedrich Schiller-Univ. Jena, math.-nat. R., 1951/52, 63—65 (1951).

**Moppert, C. F.:** Deduction of Cardano's formula by conformal mapping. Amer. math. Monthly 59, 310—314 (1952).

Die Funktion  $w = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ ,  $a_n \neq 0$  bildet die schlichte  $z$ -Ebene auf eine  $n$ -blättrige Riemannsche Fläche  $F$  ab. Die Lösungen  $z_v$  der algebraischen Gleichung über dem komplexen Zahlkörper  $\sum_{v=0}^n a_v z^v - w = 0$  können dann bei vorgegebenem  $w$  durch eine konforme Abbildung der Fläche  $F$  in die schlichte  $z$ -Ebene gefunden werden. Beide Verff. erläutern dieses Prinzip an der kubischen Gleichung  $z^3 - 3z - 2w = 0$ , auf die die allgemeine kubische Gleichung (mit einfachen Wurzeln) zurückgeführt werden kann. Von der zur o. a. Gleichung gehörenden dreiblättrigen Riemannschen Fläche wird zunächst durch Einführung einer Überverzweigung zu einer regulär verzweigten sechsbältrigen Riemannschen Fläche übergegangen, die schrittweise auf die schlichte  $z$ -Ebene abgebildet wird. Die Zusammensetzung der Abbildungsfunktionen ergibt die Cardanische Formel. *W. Engel.*

**Dias Agudo, Fernando Roldão:** Über einen Satz von Kakeya. Gaz. Mat. Lisboa 13, 1—3 (1952) [Portugiesisch].

The theorem of Kakeya referred to here states that the moduli of all the zeros of  $f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n$  ( $p_0 \neq 0$ ) are inferior to unity if  $p_0 > p_1 > \dots > p_n > 0$ . The object of the present work is the study of cases of equality in consecutive coefficients of  $f(z)$ . (1) If  $p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_n > 0$ , the moduli of the zeros of  $f(z)$  do not exceed unity. (2) If  $p_0 > p_1 > \dots > p_k = p_{k+1} > \dots > p_n > 0$  and  $g(z) = (z - a) f(z)$ ,  $1 > a > \max(p_{v+1}/p_v)$  ( $v \neq k$ ), then, for  $k \geq 1$ ,  $\Sigma(1) = (|g_1| + \dots + |g_{n+1}|)/|g_0| = a - (1 - a)(p_1 + \dots + p_{k-1} + p_{k+2} + \dots + p_n)/p_0$  and the moduli of the zeros of  $f(z)$  are less than unity. If  $k = 0$ ,  $\Sigma(1) = a - (1 - a) \cdot (p_2 + \dots + p_n - p_0)/p_0$  and the moduli of the zeros do not attain unity when  $\sum_{i=2}^n p_i \geq p_0$ . (3) If  $p_0 > \dots > p_k = p_{k+1} > \dots > p_l = p_{l+1} > \dots > p_m = p_{m+1} > \dots > p_s = p_{s+1} > \dots > p_n > 0$ , the moduli of the zeros of  $f(z)$  are inferior to unity if  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \geq p_k + p_l + p_m + \dots + p_s$ . (4) If

$p_0 = p_1 = \dots = p_n > 0$ , all the zeros of  $f(z)$  are on the unit circle. If  $n$  is odd and  $p_0 = p_1 \geq p_2 = p_3 \geq \dots \geq p_{n-1} = p_n$ , then  $-1$  is a zero of  $f(z)$ . *E. Frank.*

**Sharma, A.:** On the zeros of a certain polynomial. Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 491—493 (1952).

Let  $z^{-r} \{(1 - z)^{-h} - 1\}^r = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r) z^n$ , ( $h > 1$ ), where  $r$  is a positive integer.



The author proves that the zeros of the polynomial  $P(z) = \sum_{k=0}^n p_{m+k}(r) z^k$  lie in the region  $p_m(r)/p_{m+1}(r) \leq |z| \leq p_{m+n-1}(r)/p_{m+n}(r)$ , and gives references to analogous theorems for polynomial sections of other power series. *N. A. Bowen.*

**Marković, D.:** Sur les zéros réels des dérivées de quelques fonctions. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 3/4, 1—4, serbo-kroatische Zusammenfassg. 5 (1952).

Let  $c_j, j = 1, 2, 3, \dots$  be the real zeros and  $\alpha_k, k = 1, 2, 3, \dots$  the real parts of the complex zeros of  $P(x) = \sum_{s=0}^n a_s x^s, (a_n > 0)$ . Let all the zeros  $\beta_k, k = 1, 2, \dots$

$\dots, m$  of  $Q(x) = \sum_{s=0}^m b_s x^s, (b_m > 0)$ , be real. Let  $\max_{\min} \{c_j, \alpha_k\} = \frac{a}{b}, \max_{\min} \{\beta_k\} = \frac{a'}{b'}$ .

By Leibniz' rule applied to  $F = uv$ , we have  $F^{(n)} \geq 0$  in  $(a, b)$  when  $u^{(v)} v^{(n-v)} \geq 0, v = 0, 1, 2, \dots, n; n = 0, 1, 2, \dots$  in  $(a, b)$ . The fact that the Legendre polynomials have no real zeros outside  $(-1, 1)$  is shown to be a consequence of this idea, and so are the following results: (i) Each derivate of  $P/Q$  has no real zeros in  $(a, b')$  if  $a < b'$ , or in  $(a', b)$  if  $a' < b$ ; (ii) Each derivate of  $e^P/Q$  has no real zeros in  $(a, b')$  if  $a < b'$ , or in  $(a', b)$  if  $a' < b$  and the number of real zeros of  $P$  is even. N. Obrechhoff (this Zbl. 37, 300) has otherwise proved the first parts of (i) and (ii), the latter when  $P = \omega x, P = \omega x^2, \omega > 0$ . Marković's paper contains a number of misprints. *N. A. Bowen.*

**Wahab, J. H.:** New cases of irreducibility for Legendre polynomials. Duke math. J. 19, 165—176 (1952).

$P_n(x)$  sei das Legendresche Polynom vom Grade  $n$ , und  $L_{2n}(x) = P_{2n}(x), L_{2n+1}(x) = x^{-1} P_{2n+1}(x)$ . Es wird vermutet, daß die  $L_n(x)$  für alle  $n$  im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel seien. Verf. vermehrt die Zahl der Formen für  $n$ , für die sich die Vermutung beweisen läßt. U. a. zeigt er, daß, abgesehen von neun Fällen (die offen bleiben) die Vermutung für  $n < 500$  richtig ist. *F. Dueball.*

● **Hanneken, Clemens Bernard:** Irreducible quintic congruences. Thesis. Urbana, Illinois 1952. 6 p.

This is a summary of the author's paper of the same title (this Zbl. 64, 19).

*M. C. R. Butler.*

**Markovitch, D.:** Sur un procédé de déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynômes. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 1/2, 37—41, französ. Zusammenfassg. 41 (1952) [Serbo-kroatisch].

Eine Abwandlung des euklidischen Algorithmus, die für numerische Zwecke bequemer ist und unmittelbar auf den Fall von mehreren Polynomen in einer Unbestimmten verallgemeinert werden kann.

*H. Orsinger.*

**Cugiani, M.:** Risultante e teorema di Bézout. Periodico Mat., IV. Ser. 30, 12—32 (1952).

**Cugiani, Marco:** Il teorema di Bézout. Periodico Mat., IV. Ser. 30, 98—113 (1952).

Eine für didaktische Zwecke möglichst elementar gehaltene Behandlung der Resultante von zwei Polynomen in einer Unbestimmten und des Satzes von Bézout für zwei Gleichungen in zwei Unbekannten mit komplexen Koeffizienten. Einfachste Eigenschaften der Resultante und der Multiplizitätszahlen werden hergeleitet. Die Betrachtungsweise ist nach geometrischen Gesichtspunkten orientiert und ermöglicht auch die effektive Bestimmung der Lösungen und ihrer Multiplizitäten.

*H. Orsinger.*

**Rédei, L.:** Kurzer Beweis der Waringschen Formel. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 151—153 (1952).

Here is given a short algebraic proof of the formula of Waring:

$$(k) \quad p_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \frac{(-1)^i k}{i} (a_1 + \dots + a_n)^i, \quad k = 1, 2, \dots,$$

where  $a_i = (-1)^k s_k, s_k$  is the  $k$ -th elementary symmetric form,  $p_k$  is the  $k$ -th power



sum of  $x_1, \dots, x_n$ , and  $(k)$  shows that out of the sum only those terms of weight  $k$  are to be retained.

*E. Frank.*

**Pólya, G.:** Remarques sur un problème d'algèbre étudié par Laguerre. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **31**, 37—47 (1952).

This paper contains generalizations of theorems of Laguerre. The principal results are as follows: (1) Let  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  be  $2n$  independent variables and  $\prod_{i=1}^n (z - x_i) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$ ,

$\prod_{i=1}^n (z - y_i) = \sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^k = s_k$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i^k = t_k$ ,  $s_k - t_k = u_k$ ,  $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x_i - y_j) = R$ . Then the  $2n+1$  quantities  $R, R a_1, R a_2, \dots, R a_n$ ;  $R b_1, R b_2, \dots, R b_n$  are polynomials in  $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$ , and the expression  $R$  does not contain  $u_{2n}$ . (2) Let  $\prod (x_i + x_j) = P, i, j = 1, 2, \dots, n, i < j$ ,  $P$  of degree  $n(n-1)/2$ . Then the  $n+1$  quantities  $P, P a_1, P a_2, \dots, P a_n$  are polynomials in  $s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n-1}$ , and the expression  $P$  does not contain  $s_{2n-1}$ . *E. Frank.*

**Toscano, Letterio:** Su una classe di funzioni simmetriche. *Bull. Inst. Politecn.* **4**, 155—166 (1949).

Verallgemeinerung (auf  $m = 4, 5, 6, \dots$ ) der evidenten Tastache, daß die Differenzgleichung  $m = 2$ . Ordnung  $x_{n+2} - (a+b)x_{n+1} + abx_n = 0$  (wohl  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; Bem.: auch  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) aus den Fundamentallösungen  $x_n = a^n$  und  $x_n = b^n$  gewinnbare partikuläre Lösungen  $x_n = a^n + b^n$  und  $x_n = (a^n - b^n)/(a - b)$  besitzt (Bem.: Verf. beginnt bei  $m = 3$ ; stillschweigend  $a, b, \dots$  unbestimmt). Z. B. bei  $m = 4$ . Ordnung:  $(1) x_{n+4} - \underbrace{(a+b+c+d)}_{a_1} x_{n+3} + \dots + \underbrace{abcd}_{a_4} x_n = 0$  besitzt 4 partikuläre Lösungen

$$\begin{aligned} k=1 & \quad x_n = \begin{cases} a^n + b^n + c^n + d^n \\ [a, b]^n + [a, c]^n + \dots + [c, d]^n \end{cases} & \begin{array}{l} 4_2 \text{ Klammern; mit je } (n+1)_1 \text{ Gliedern, falls } n > 0 \\ 4_3 \text{ Klammern; mit je } (n+2)_2 \text{ Gliedern, falls } n > 0 \end{array} \\ k=2 & \\ k=3 & \\ k=4 & \quad \begin{cases} [a, b, c]^n + [a, b, d]^n + \dots + [b, c, d]^n \\ [a, b, c, d]^n \end{cases} & \begin{array}{l} 4_3 \text{ Klammern; mit je } (n+3)_3 \text{ Gliedern, falls } n > 0 \end{array} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet das eckige Klammersymbol (mit Index  $n \geq 0$ ) von  $k$  Größen deren vollständige symmetrische Funktion  $n$ -ten Grades, also z. B.  $[a, b, c]^n = a^n + a^{n-1}(b+c) + a^{n-2}(b^2 + bc + c^2) + \dots + (b^n + b^{n-1}c + \dots + c^n) = [a]^n [b, c]^0 + \dots + [a]^0 [b, c]^n$ . Damit ist für  $n \leq 0$  wegen (1) die Definition von  $[ ]^n$  bereits festgelegt. Für die Anfangswerte modifiziert Verf. (1) zu  $x_1 - a_1(4_k - 3_k) = 0$ ,  $x_2 - a_1 x_1 + a_2(4_k - 2_k) = 0$ ,  $x_3 - a_1 x_2 + a_2 x_1 - a_3(4_k - 1_k) = 0$ , da er  $n < 0$  nicht erwähnt. — Anwendungen: Ableitung von  $x_n = x_n(a_1, \dots, a_m)$  nach  $a_i$ ; Gewinnung einer  $(2m-1)$ -reihigen Determinantengestalt (mit eckigen Klammersymbolen als Elementen) für die Diskriminante einer algebraischen Gleichung  $m$ -ten Grades in  $x$ . — Nach Meinung des Ref. ließe sich der Aufbau durchsichtiger gestalten, wenn man von der Differenzgleichung statt den  $m$  Lösungen ausginge.

*I. Paasche.*

## Gruppentheorie:

● **Sade, Albert:** Théorie des groupes: Quasigroupes. Marseille: Chez l'Auteur 1950. 16 p.

L'A. publie ici un résumé d'un travail concernant les quasi-groupes, en donnant sous une forme non usuelle une suite d'énoncés dont certains sont des définitions et d'autres des résultats. Les démonstrations figurent dans un travail manuscrit qui n'a pas été publié jusqu'à présent. Les principaux résultats ont déjà été analysés ici à propos de deux notes aux Comptes-rendus de l'Acad. des sci. de Paris (ce Zbl. **51**, 252), l'une relative aux diviseurs singuliers des quasi-groupes, l'autre aux quasi-groupes obéissant à la loi des keys. Ces notes sont d'ailleurs postérieures à ce résumé. Dans ce résumé, certaines définitions sont omises, par exemple celle d'un quasi-groupe (ensemble muni d'une opération  $ab$  avec existence d'un quotient unique à droite et d'un quotient unique à gauche). La terminologie n'est pas toujours heu-



reuse, par exemple: diviseur = sous-quasi-groupe (on ne sait pas bien d'ailleurs si un sous-quasi-groupe désigne comme il faut s'y attendre un sous-ensemble fermé pour l'opération du produit et l'opération du quotient à droite et à gauche). Les mots utilisés sont souvent anglais: coset, shear, twist, keys, semi-group, ce qui est fâcheux pour ce dernier puisque semi-group est la traduction anglaise de demi-groupe (Halbgruppe). La loi des keys, ou loi alternative à droite, exprime la relation  $(a b) \cdot b = a$ . Cette loi peut paraître assez pathologique mais elle revêt une certaine importance par l'exemple suivant: si  $Q$  est un quasi-groupe abélien, on peut définir le quasi-groupe  $Q^*$  par l'opération

$$x * y = (a y) : x$$

$a$  étant un élément fixe de  $Q$ . Le quasi-groupe obtenu  $Q^*$  vérifie la loi alternative à droite; il intervient dans l'étude de l'isotropie [cf. G. Pickert, *Projektive Ebenen* (ce Zbl. 66, 387), p. 48—49]. Les applications des quasi-groupes et de leurs cas particuliers (loop, etc...) ne sont pas étudiées.

L. Lesieur.

**Nakada, Osamu: Partially ordered Abelian semigroups. II. On the strongness of the linear order defined on Abelian semigroups.** J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., I. Ser. 12, 73—86 (1952).

(Partie I, ce Zbl. 53, 211.) Dans cette Partie II, l'A. donne des conditions pouvant remplacer la loi de simplification dans la définition d'un semi-groupe abélien totalement ordonné  $S$ , ou demi-groupe abélien totalement et fortement ordonné. (Se reporter à la partie I pour les définitions.) Il désigne par  $S(a)$  ou secteur engendré par  $a \in S$  le sous-demi-groupe des puissances de  $a$ , et par  $T(a)$  la classe de  $a$  dans l'équivalence définie par  $a \equiv b \Rightarrow \exists n$  et  $m$  tels que  $a^n = b^m$ . Les conditions introduites dans l'étude générale d'un demi-groupe abélien ordonné et qui sont toutes vérifiées dans le cas d'un semi-groupe abélien totalement ordonné, sont les suivantes:  $(\alpha)$ :  $a^n = b^n$  implique  $a = b$ .  $(\beta)$ : Tous les éléments de  $S$  sont d'ordre infini, sauf l'élément unité  $e$  s'il existe.  $(\gamma)$ : Si  $a \neq e$ , on a  $a b \neq b$  pour tout  $b \in S$ .  $(\delta)$ : Si  $T(a)$  et  $T(b)$  sont disjoints,  $c \in T(a)$  et  $c \in T(b)$  le sont aussi. (A): Si  $a^2 \geq a$  (ou  $a \geq a^2$ ), on a  $a b \geq b$  (ou  $b \geq a b$ ),  $\forall b \in S$ . (B): Si  $a^2 > a$  (ou  $a > a^2$ ), on a  $a b > b$  (ou  $b > a b$ ),  $\forall b \in S$ . Les principaux résultats sont alors les suivants: Un demi-groupe totalement ordonné  $S$  est fort si et seulement si  $S$  vérifie les conditions  $(\alpha)$ ,  $(\delta)$  et (B). Une autre condition nécessaire et suffisante est constituée par l'ensemble des conditions  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$  et  $(\delta)$ . Comme corollaire on en déduit qu'un ordre total fort peut être défini sur un demi-groupe abélien  $S$  si et seulement si  $S$  vérifie les conditions  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$  et  $(\delta)$ . Lorsque  $S$  possède un élément unité, les conditions précédentes se réduisent à  $(\alpha)$  et  $(\delta)$ . Comme corollaire, l'A. obtient les conditions nécessaires et suffisantes suivantes pour que la loi de simplification soit valable dans un demi-groupe abélien ayant un élément unité: 1.  $a^n = b^n$  implique  $a = b$ . 2.  $a c = b c$  implique l'existence de  $m$  et  $n$  tels que  $a^m = b^n$ .

L. Lesieur.

**Kulikov, L. Ja.: Über direkte Zerlegungen von Gruppen. I, II.** Ukrain. math. Žurn. 4, 230—275, 347—372 (1952) [Russisch].

Es ist ein Zentralproblem in der Theorie der direkten Zerlegungen von Gruppen zu entscheiden, ob zwei direkte Zerlegungen einer Gruppe  $G$  isomorphe Verfeinerungen besitzen. In dieser Arbeit, die auch in englischer Übersetzung vorliegt [Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 2, 23—87 (1956)], greift Verf. das Problem mit topologischen Methoden an. Sei  $(D) \quad G = \sum_{\alpha} D_{\alpha}$ ,  $\alpha \in M$  eine direkte Zerlegung einer additiv geschriebenen, aber nicht notwendig abelschen Gruppe, und  $\Omega$  eine feste Menge von Endomorphismen von  $G$ . Die Zerlegung  $(D)$  wird bezüglich  $\Omega$  folgendermaßen zu einem topologischen Raum gemacht: die Punkte des Raumes sind die direkten Summanden  $D_{\alpha}$ , und eine Untermenge von Punkten  $D_{\beta}$ ,  $\beta \in N \subseteq M$  heiße abgeschlossen, wenn die von den  $D_{\beta}$  erzeugte Untergruppe  $H = \sum_{\beta} D_{\beta}$ ,  $\beta \in N$ ,  $\Omega$ -zulässig, d. h.  $H \Omega \subseteq H$  ist. Es kann vorkommen, daß der so definiert



topologische Raum das Kolmogorovsche Trennungsaxiom  $T_0$  erfüllt: je zwei verschiedene Punkte haben verschiedene abgeschlossene Hüllen. Wenn dies zutrifft, so kann man in natürlicher Weise den Raum  $(D)$  zu einer teilweise geordneten Menge  $L(D, \Omega)$  machen, indem man definiert:  $D_\alpha$  geht  $D_\beta$  voran, falls  $D_\alpha$  in der abgeschlossenen Hülle von  $D_\beta$  enthalten ist. Wenn  $\Omega$  die Menge der normalen Endomorphismen von  $G$  ist, so besagt das  $T_0$ -Axiom, daß von je zwei Summanden von  $(D)$  keiner einen nicht-trivialen Homomorphismus in das Zentrum des anderen gestattet. Das Hauptresultat des Verf. ist der folgende Satz:  $\Omega$  sei die Menge aller normalen idempotenten Endomorphismen von  $G$ . Für die Existenz von zentral isomorphen Verfeinerungen von je zwei direkten Zerlegungen von  $G$  ist es notwendig, daß dasselbe für jeden Index  $\alpha \in M$  gilt: je zwei direkte Zerlegungen von  $D_\alpha$  haben zentral isomorphe Verfeinerungen. Wenn obendrein wenigstens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist: (i)  $G$  ist höchstens abzählbar; (ii) die absteigende Kettenbedingung gilt in  $L(D, \Omega)$ , so ist die obige Bedingung auch hinreichend. Als Anwendung behandelt Verf. den Fall der vollständig zerlegbaren Gruppen, d. h. der abelschen Gruppen, die direkte Summen von (lokal-zyklischen) Gruppen vom Rang 1 sind. Baer (dies. Zbl. 16, 203) hat bewiesen, daß je zwei vollständige Zerlegungen einer solchen torsionsfreien Gruppe  $G$  isomorph sind, und daß auch jeder direkte Summand von  $G$  wieder vollständig zerlegbar ist, sofern die folgende Bedingung erfüllt ist: Man fasse in der vollständigen direkten Zerlegung von  $G$  alle isomorphen Summanden zu einer Komponente zusammen,  $G = \sum_\alpha A_\alpha$ ; dann soll für die Indexmenge der  $\alpha$ , d. h. die Menge der verschiedenen Typen, die absteigende Kettenbedingung (im Sinne der teilweisen Ordnung der Typen) gelten. Verf. zeigt, daß in der vorliegenden Situation das Axiom  $T_0$  gilt, und daß für jedes feste  $\alpha$  je zwei verschiedene direkte Zerlegungen von  $A_\alpha$  zentral isomorphe Verfeinerungen haben. Daher wird sein Hauptsatz anwendbar, und es ergibt sich: wenn die Gruppe  $G$  vollständig zerlegbar und höchstens abzählbar ist [oder die absteigende Kettenbedingung für die mit der obigen Zerlegung verbundenen teilweise geordneten Mengen  $L(A, \Omega)$  gilt — dies entspricht Baers Bedingung], dann ist jeder direkte Summand von  $G$  ebenfalls vollständig zerlegbar. Zum Abschluß behandelt Verf. den Fall der periodischen Gruppen und gewisse Klassen von nicht-abzählbaren gemischten Gruppen. K. A. Hirsch.

**Faddeev, D. K.:** Zur Homologietheorie in Gruppen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 17—22 (1952) [Russisch].

Gegeben seien wie üblich eine additive abelsche Gruppe  $\mathfrak{A}$  und eine beliebige multiplikative Gruppe  $\mathfrak{G}$ , deren Elemente Rechtsoperatoren für  $\mathfrak{A}$  darstellen. Ferner sei  $\mathfrak{H}$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G} = \sum \varrho$  die Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  in Rechtsnebenklassen nach  $\mathfrak{H}$ . Die auf der Menge dieser Restklassen definierten Funktionen  $f$  einer Variablen mit Werten aus  $\mathfrak{A}$  bilden eine additive Gruppe  $\mathfrak{i}$ , für die  $\mathfrak{G}$  in folgender Weise als Operatorenbereich definiert wird:  $f^x(\varrho) = [f(\varrho x^{-1})]^x$  für  $x \in \mathfrak{G}$ . Verf. beweist  $H^n(\mathfrak{G}, \mathfrak{i}) \cong H^n(\mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ . R. Kochendörffer.

**Borevič, Z. I.:** Über Homologiegruppen, die mit einer freien Gruppe verknüpft sind. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 365—384 (1952) [Russisch].

Die Gruppe  $G$  sei als Faktorgruppe einer freien Gruppe  $F$  dargestellt:  $G \cong F/R$ . Ferner sei  $R_0$  die Faktorgruppe der Gruppe  $R$  nach ihrem Kommutator. Verf. beweist: Ist  $G$  endlich und  $n \geq 3$ , so gilt  $H^n(G, R_0) \cong H^{n-2}(G, J)$ , wobei  $J$  eine unendliche zyklische Gruppe ist, für die die Elemente aus  $G$  identische Operatoren darstellen. Sodann gibt Verf. einen neuen Beweis für den Satz  $H^n(G, \text{Hom}(R_0, K)) \cong H^{n+2}(G, K)$  von Eilenberg-MacLane (vgl. dies. Zbl. 29, 340). R. Kochendörffer.

**Gorčinskij, Ju. N.:** Periodische Gruppen mit endlich vielen Klassen konjugierter Elemente. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 209—216 (1952) [Russisch].

Zu jeder beliebig vorgegebenen natürlichen Zahl  $n$  existiert eine natürliche, nur von  $n$  abhängige Zahl  $k_n$  mit folgender Eigenschaft: Die Elementordnungen einer



beliebigen periodischen Gruppe  $G$ , die  $n$  Klassen konjugierter Elemente enthält, sind höchstens gleich  $k_n$ . Ist  $p$  die kleinste Primzahl, die in den Elementordnungen von  $G$  aufgeht und enthält  $G$  ein Element der Ordnung  $p^n$ , so ist  $\alpha(p-1) \leq n-1$ . Ferner werden Gruppen betrachtet, in denen sämtliche Elemente gleicher Ordnung konjugiert sind. R. Kochendörffer.

**Shoda, Kenjiro:** Ein Satz über die Abelschen Gruppen mit Operatoren. Proc. Japan Acad. 28, 241—242 (1952).

Es sei  $A$  eine abelsche Gruppe,  $\Omega$  eine Erweiterung von  $A$  und  $\Gamma$  ein Operatorenring von  $\Omega$  mit Einselement 1, der den identischen Automorphismus von  $A$  bewirkt. Ein Element  $\alpha$  aus  $\Omega$  heißt algebraisch über  $A$ , wenn die durch  $A$  und  $\alpha$  erzeugte Gruppe  $A(\alpha)$  keine Untergruppe  $B$  mit  $A \cap B = 0$  besitzt. Eine Erweiterung  $\Omega$  über  $A$  heißt algebraisch, wenn jedes Element aus  $\Omega$  algebraisch über  $A$  ist. Zwei Erweiterungen heißen äquivalent über  $A$ , wenn sie durch die  $A$  elementweise festlassenden Isomorphismen aufeinander abgebildet werden. Verf. beweist nun folgenden Satz: Jede algebraische Erweiterung von  $A$  ist mit keiner echten Untergruppe äquivalent, wenn man voraussetzt: 1. Teilerkettensatz für Linksideale in  $\Gamma$ ; 2. Jeder Operatorhomomorphismus  $\bar{\sigma}$  eines Linksideals  $\bar{M}$  in einem Restklassenmodul  $\Gamma = \Gamma/l$  nach einem Linksideal  $l$  wird durch die Abbildung  $\sigma$  von  $m$  induziert, die  $m$  aus  $M$  in  $m t_\sigma$  überführt. Dabei bedeutet  $t_\sigma$  ein Element aus  $\Gamma$ . G. Zacher.

**Fuchs, L.:** On Abelian groups in which the classes of isomorphic proper subgroups contain the same number of subgroups. Czechosl. math. J. 2, 387—390, engl. Zusammenfassg. 390 (1952) [Russisch].

Die Menge aller eigentlichen Untergruppen einer gegebenen Gruppe werde in Klassen einander isomorpher eingeteilt. Die Frage nach allen abelschen Gruppen, bei denen jede derartige Klasse die gleiche Anzahl  $k$  von Untergruppen enthält, ist für  $k=1$  von T. Szele gelöst worden (dies. Zbl. 47, 255). Verf. zeigt, daß die einzigen abelschen Gruppen mit  $k > 1$  die elementaren abelschen Gruppen vom Typus  $(p, p)$  und  $(p, p, p)$  sind ( $p$  Primzahl). R. Kochendörffer.

**\*Permutti, Rodolfo:** Sulle catene ad indici primi di taluni gruppi semplici. Ricerche Mat. 1, 241—248 (1952).

**\*Zacher, Giovanni:** Caratterizzazione dei  $t$ -gruppi finiti risolubili. Ricerche Mat. 1, 287—294 (1952).

**Honda, Kin-ya:** On finite groups, whose Sylow-groups are all cyclic. Commentarii math. Univ. St. Pauli 1, 5—39 (1952).

A finite group  $G$  is called hypercyclic (h. c.) if all Sylow-groups are cyclic. Such groups are considered by many authors. In particular, the structure of h. c. groups are determined by Zassenhaus [Lehrbuch der Gruppentheorie (this Zbl. 18, 9) p. 138] by means of two generators and three fundamental relations. In Part I of this paper the structure of h. c. groups are considered from the view-point of group extensions. Let  $G$  be an arbitrary group,  $A$  be a subgroup and  $B$  be a normal subgroup of  $G$  such that  $G = A B$  and  $A \cap B = \{1\}$  hold. Each  $a \in A$  gives rise to an automorphism  $\tau_a: x \rightarrow a^{-1} x a$  ( $x \in B$ ) of  $B$  which will be denoted by  $\sigma$ . The kernel  $F$  of the homomorphism  $a \rightarrow \tau_a$  is a normal subgroup of  $G$ .  $F$  is called the foundation group and  $f = [A:F]$  is called the  $S$ -index of the group extension  $(A, B, \sigma)$ . Similarly by  $G = (A_1, A_2, \dots, A_r, \sigma_1, \dots, \sigma_{r-1})$  we mean  $G_2 = (A_1, A_2, \sigma_1)$ ,  $G_3 = (G_2, A_3, \sigma_2)$ ,  $\dots$ ,  $G = (G_{r-1}, A_r, \sigma_{r-1})$ . The  $S$ -indices  $f_1, f_2, \dots, f_{r-1}$  of these group extensions are called the system of  $S$ -indices of  $G$ . Now let  $G$  be a h. c. group of order  $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$  such that  $p_j \nmid p_i - 1$  ( $i > j$ ). Then we have  $G = (P_1, \dots, P_r; \sigma_1, \dots, \sigma_{r-1})$  by  $p_i$ -Sylow-groups  $P_i$  of  $G$  ( $i = 1, \dots, r$ ) (Splitting theorem). From this follows several results on the structure of h. c. groups. In Part II the classification problem of h. c. groups of a given order  $n$  is considered. Firstly, two h. c. groups of the same order are  $L$ -similar (in the sense of A. Rottlaender [Math. Z. 28, 641—653 (1928)]) if and only if they have the same  $S$ -indices  $f_1, \dots, f_{r-1}$  for  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ . It is not difficult to determine all the possible  $S$ -indices  $f_1, \dots, f_{r-1}$  for given  $n$ . Secondly, for given order  $n$  and  $S$ -indices

$f_1, \dots, f_{r-1}$  there exists  $\prod_{i=1}^{r-2} \varphi((f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_i), f_{i+1})$  non-isomorphic h. c. groups, where  $\varphi$  means the Euler's function and  $f_1 \vee \dots \vee f_i$  means the l. c. m. of  $f_1, \dots, f_i$ . To prove this theorem the following ramification theorem is essential. Two h. c. groups  $G = (G_0, P; \sigma)$  and  $G' = (G_0, P; \sigma')$  with the same foundation group  $F$  are  $L$ -similar but not always isomorphic.



Let  $[P] = p^e$ . In case  $p = 2$  the problem becomes trivial and hence we assume  $p \geq 3$ . Let  $q$  be a fixed primitive root mod  $p^e$ . Then  $\sigma$  is determined by corresponding  $q^{p^{e-1}(p-1)/f}$  to an element  $d \in G_0$  such that  $dF$  generates  $G_0/F$ . Then we denote  $\bar{G} = (F_0, P; d)$  and similarly  $\bar{G}' = (G_0, P; d')$ . (Ramification theorem)  $G$  is isomorphic to  $G'$  if and only if  $d d'^{-1} \in V_0 F$  where  $V_0$  means the centralizer of the commutator subgroup of  $G_0$ .  
Y. Kawada.

Sysoev, A. E.: Anwendung der Theorie der Zerlegung der symmetrischen Gruppen nach einem Doppelmodul auf das Studium der Gewebe-Bindung. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 3 (49), 109—110 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtet einen Zusammenhang zwischen der Doppelmodulzerlegung der symmetrischen Gruppe des Grades  $r$  nach einer zyklischen Untergruppe der Ordnung  $r$  und den verschiedenen Gewebe-Bindungen, deren Rapport in Kette- und Schußbrichtung  $r$  Fäden beträgt.  
R. Kochendörffer.

Klein, Micha: The polyedromodular quotient of the 5-th order compared with the groups associated with the rotational symmetry of the icosahedron and the rotational symmetry of the 5 cell. J. Osaka Inst. Sci. Technol. 4, 1—17 (1952).

Die Drehgruppen des Ikosaeders und des 5-Zells (im 4-dim. Raum) werden verglichen und verschiedene Darstellungen dieser Gruppen werden untersucht.

J. J. Burckhardt.

Murnaghan, F. D.: On the multiplication of representations of the linear group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 738—741 (1952).

Ein Hauptproblem der Darstellungstheorie der vollen  $n$ -dimensionalen linearen Gruppe ist die Bestimmung der irreduziblen Bestandteile des Kroneckerproduktes zweier irreduziblen Darstellungen der Gruppe. Verf. beleuchtet an Hand von Beispielen die Vorteile, die die Untersuchungen von M. J. Newell (dies. Zbl. 54, 12, 2. Referat) für dieses Problem ergeben.

W. Specht.

Iwahori, Nagayoshi: Non-representability of real general linear groups in higher dimensional Lorentz group. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 2, 13—23 (1952).

Es wird folgender Satz bewiesen:  $R$  sei der Körper der reellen Zahlen,  $n \geq 3$  und  $m > 0$  ganz. Dann gibt es keinen im kleinen isomorphen stetigen Homomorphismus von der allgemeinen linearen Gruppe  $GL(n, R)$  in die Gruppe  $O(m, 1, R)$  der  $(m+1)$ -dimensionalen reellen linearen Transformationen, die  $x_1^2 + \dots + x_m^2 - x_{m+1}^2$  invariant lassen.

H. Boerner.

Gleason, Andrew M.: Groups without small subgroups. Ann. of Math., II. Ser. 56, 193—212 (1952).

This paper proves the result that a finite dimensional locally compact group without small subgroups is a Lie group. It provides the base for the next one. Together these two papers solve Hilbert's fifth problem affirmatively.

W. T. van Est.

Montgomery, Deane and Leo Zippin: Small subgroups of finite-dimensional groups. Ann. of Math., II. Ser. 56, 213—241 (1952).

Full proofs of the results announced earlier (cf. the next review).

W. T. van Est.

Montgomery, Deane and Leo Zippin: Small subgroups of finite-dimensional groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 440—442 (1952).

In this note the following theorem is announced: (A) If  $G$  is a separable metric locally compact finite dimensional connected and locally connected group, all whose proper subgroups are generalized Lie groups (in the sense of Iwasawa-Gleason), then  $G$  contains an invariant closed generalized Lie group  $H$ , such that  $G/H$  is finite dimensional and has no small subgroups. Combining this theorem with results of Gleason and Goto the authors show how it solves Hilbert's fifth problem. More generally they show that every finite dimensional separable metric locally compact group is a generalized Lie group. The steps leading to the announced theorem are outlined very briefly and may be summarized as follows: (1) If  $G$  satisfies the hypothesis of (A), then  $G$  contains an invariant generalized Lie group  $H$  such that  $G/H$  satisfies the same hypothesis and has trivial centre, (2) no centralizer of any subgroup of  $G/H$  of positive dimension contains an infinite compact zero-dimensional abelian group, (3)  $G/H$  has no infinite compact zero-dimen-



sional abelian subgroup, (4)  $G/H$  has no small finite subgroups, (5)  $G/H$  has no small subgroups. Detailed proofs have been published in the meanwhile by the authors (cf. the preceding review but one). W. T. van Est.

**Hu, Sze-tsen:** On local structure of finite-dimensional groups. Trans. Amer. math. Soc. **73**, 383—400 (1952).

Die folgende Verschärfung eines Ergebnisses von D. Montgomery (dies. Zbl. **45**, 312) wird bewiesen: Jede metrische separable lokal kompakte zusammenhängende  $n$ -dimensionale topologische Gruppe  $G$  mit lokal zusammenhängendem Zentrum besitzt eine kompakte 0-dimensionale Untergruppe  $Z$  und eine zusammenhängende lokal zusammenhängende  $n$ -dimensionale invariante lokale Untergruppe  $S$ , derart daß sich eine topologische Abbildung  $F$  von  $Z \times S$  auf eine offene Umgebung des Einselementes in  $G$  durch  $F(z, s) = zs$  erklären läßt. Wie Verf. bemerkt, bleibt es unentschieden, ob  $Z$  eine invariante Untergruppe von  $G$  ist. Als Korollar ergibt sich: Besitzt  $G$  keine beliebig kleine Untergruppen, so ist  $G$  lokal zusammenhängend. T. Ganea.

**Murakami, Shingo and Morikuni Gotô:** On the inner automorphisms of a compact group. Nagoya math. J. **4**, 119—123 (1952).

Theorem: An automorphism of a compact Lie group  $G$  is inner if and only if it transforms every element of  $G$  into a conjugate element. From this theorem the authors derive a simple proof for Iwasawa's theorem to the effect that the inner automorphisms of a compact connected group constitute the maximal connected subgroup in the group of all automorphisms. W. T. van Est.

**Hochschild, G.:** The automorphism group of a Lie group. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 209—216 (1952).

Result: The automorphism group  $A(G)$  of a Lie group  $G$  is a Lie group if  $G/G_0$  is finitely generated,  $G_0 =$  maximal connected subgroup of  $G$ . The natural restriction homomorphism from  $A(G)$  into  $A(G_0)$  is investigated. W. T. van Est.

**Est, W. T. van:** Dense imbeddings of Lie groups. II. (I. II.) Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **55**, 255—266, 267—274 (1952).

$\mathfrak{G}_i$  bezeichne zusammenhängende reelle Lie-Gruppen und  $G_i$  ihre Lieschen Ringe. Ist  $G \subseteq H$  und bei passender Gruppenrealisierung  $\mathfrak{G}$  dicht in  $\mathfrak{H}$ , so heißt  $G$  dicht in  $H$ . Diese Relation ist transitiv, wie auf S. 271 behauptet wird. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **44**, 258) hat Verf. definiert:  $\mathfrak{G}$  und  $G$  heißen adjungiert abgeschlossen,  $(CA)$ , wenn die adjungierte Darstellung in der vollen linearen Gruppe abgeschlossen ist. Hier wird folgende Charakterisierung dieses Begriffes gezeigt:

$$\mathfrak{G}(CA) \Leftrightarrow (\mathfrak{G} \text{ dicht in } \mathfrak{H} \Rightarrow \mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cdot \text{Zentrum, für alle } \mathfrak{H}).$$

$G$  ist dicht in einem kleinsten  $(CA)$  Ring  $\tilde{G}$ , der bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt ist.  $G$  und  $\tilde{G}$  haben gleiches Zentrum. Eine Nicht- $(CA)$  Gruppe  $\mathfrak{G}$  liegt dagegen immer in mehreren  $(CA)$  Gruppen dicht, die alle den gleichen Ring  $\tilde{G}$  haben. Die Beweise verwenden Methoden von Mal'cev [Mat. Sbornik, n. Ser. **16** (58), 163—189 (1945)]. In einem gegebenen  $H$  werden alle dichten Unterringe konstruiert, bei Übertragung auf Gruppen erhält man jedoch nicht immer alle dichten Untergruppen. Ernst Witt.

**Est, W. T. van:** Some theorems on  $(CA)$  Lie algebras. I. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **55**, 546—557, 558—568 (1952).

Bezeichnungen wie im vorangehenden Referat. Theoreme: 1. Ist  $G$  dicht im  $(CA)$ -Ring  $H$ , so ist jeder Isomorphismus von  $G$  in  $H$  zu einem Automorphismus von  $H$  fortsetzbar. Ein Beispiel zeigt, daß hier  $(CA)$  nicht gestrichen werden darf. 2.  $G$  und sein Radikal können nur gleichzeitig  $(CA)$ -Ringe sein. — Verf. stellt die Frage, wann eine in  $\mathfrak{H}$  dichte  $(CA)$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$  direkt zerlegbar ist (was entsprechend für Ringe immer zutrifft), und findet z. B., daß dies für halbeinfaches  $\mathfrak{G}$  nur im trivialen Fall  $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$  eintreten kann. Ernst Witt.



Godement, Roger: Une généralisation du théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 2137—2139 (1952).

Let  $G$  be a connected Lie group,  $K$  a compact subgroup of  $G$ . Let  $\Omega$  be an open set of  $G$  invariant under the right translations induced by  $K$ . A function  $\theta$  on  $\Omega$  is said to be harmonic if (a)  $\theta(gk) = \theta(g)$ ,  $k \in K$ , and (b)  $\theta$  is annihilated by all differential operators on  $G$ , which commute with the left translations of  $G$  and are invariant under the right translations of  $K$ . Theorem:  $\theta$  is harmonic if and only if for any  $x \in G$  sufficiently close to 1 we have  $\theta(g) = \int \theta(gkx) dk$ , where  $dk$  is the Haar measure on  $K$  with  $\int dk = 1$ . — Taking  $G$  to be the group of displacements of euclidean space and  $k$  to be the group rotations, it is seen that the classical mean value theorem for harmonic functions is included in the above one.

W. T. van Est.

• Cartan, E.: Oeuvres complètes. Part I. Groupes de Lie. Vol. I. Paris: Gauthier-Villars 1952. XXXII, 568 p.

• Cartan, E.: Oeuvres complètes. Part I. Groupes de Lie. Vol. II. Paris: Gauthier-Villars 1952. VIII, 788 p.

### Verbände. Ringe. Körper:

Raney, George N.: Completely distributive complete lattices. Proc. Amer. math. Soc. 3, 677—680 (1952).

Ist  $L$  ein vollständiger Verband, so bilden die Semiideale  $M$  (definiert durch  $n \leq y \in M \rightarrow n \in M$ ) einen vollständigen Mengenverband  $R(L)$ . Verf. beweist, daß die Abbildung  $\theta$  mit  $\theta(M) = \bigcup M \in L$  genau dann ein vollständiger Verbands-homomorphismus von  $R(L)$  auf  $L$  ist, wenn  $L$  voll distributiv ist. Ein vollständiger Verbandsisomorphismus zwischen  $L$  und einem vollständigen Mengenverband existiert genau dann, wenn  $L$  auch vollständig atomar ist.

P. Lorenzen.

Balachandran, V. K.: A characterization for complete Boolean algebras. J. Osaka Inst. Sci. Technol. 4, 39—44 (1952).

In the meantime this paper also appeared in the J. Madras Univ. (cf. this Zbl. 57, 23).

V. S. Krishnan.

Amitsur, S. A.: A general theory of radicals. I. Radicals in complete lattices. Amer. J. Math. 74, 774—786 (1952).

L'A. développe une étude abstraite de la notion générale de „radical“ en vue d'unifier les diverses notions proposées sous ce nom. Il part de l'idée que pour les „radicaux“ définis dans les anneaux, on considère une propriété  $\pi$  invariante par homomorphisme, le  $\pi$ -radical d'un anneau  $S$  étant un idéal  $N$  maximal parmi ceux possédant la propriété  $\pi$ , et tel que  $S/N$  n'ait aucun idéal possédant la propriété  $\pi$ ; et il observe que la plupart des propriétés démontrées sur les „radicaux“ sont dues au fait que si  $A, B, C$  sont trois idéaux tels que  $A/B$  ait la propriété  $\pi$ , alors  $(A + C)/(B + C)$  a aussi la propriété  $\pi$  (en vertu de l'invariance de  $\pi$  par homomorphisme). La présentation qu'il donne de la théorie générale consiste alors à partir non pas d'idéaux ou de sous-groupes, mais d'un „lattice“ complet  $M$  (qui sera spécialisé en „lattice“ d'idéaux ou de sous-groupes), et d'une relation réflexive  $a \varrho b$  dans  $M$ , telle que  $a \varrho b$  entraîne  $a \geq b$  et que les relations  $a \varrho b$  et  $c \geq b$  entraînent  $(a, c) \varrho c$  (dans le cas des idéaux,  $\varrho$  sera la relation „ $A \supset B$  et  $A/B$  a la propriété  $\pi$ “). Nous renvoyons au mémoire lui-même pour l'énumération des résultats, qui correspondent étroitement aux résultats classiques sur les divers „radicaux“.

J. Dieudonné.

Wever, Franz: Über reduzierte freie Liesche Ringe. Math. Z. 56, 312—325 (1952).

Im freien assoziativen, von  $k$  freien Erzeugenden  $a_1, a_2, \dots, a_k$  erzeugten Ring  $\mathfrak{A}$  über dem Körper der rationalen Zahlen als Koeffizientenbereich läßt sich durch Einführung der Lieschen Multiplikation  $[r, s] = rs - sr$  der freie Liesche Ring  $\mathfrak{L}$  in  $\mathfrak{A}$  erklären, der aus allen Polynomen von  $\mathfrak{A}$  besteht, die sich durch Addition und Liesche Multiplikation aus den Erzeugenden mit rationalen Koeffizienten bilden lassen. Bezeichnet  $\mathfrak{A}_m$  den Modul aller homogenen Polynome von  $\mathfrak{A}$  des Grades  $m$  und  $\mathfrak{L}_m$  den Durchschnitt  $\mathfrak{A}_m \cap \mathfrak{L}$ , so läßt sich im Grupperring  $\mathfrak{S}_m$  der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_m$  in  $m$  Ziffern eine Rechtideal  $\mathfrak{Q}_m$  erklären, derart daß  $\mathfrak{L}_m$  aus  $\mathfrak{A}_m$  durch Anwendung der Operatoren aus  $\mathfrak{Q}_m$  entsteht, der Modul  $\mathfrak{L}_m$  selbst dabei invariant gegenüber  $\mathfrak{Q}_m$  ist. Das Rechtsideal  $\mathfrak{Q}_m$  wird durch sein erzeugendes Idempotent bestimmt. Die reduzierten freien Lie-



schen Ringe entstehen aus  $\mathfrak{L}$  durch Restklassenbildung nach einem vollinvarianten Ideal  $\mathfrak{M}$ ; dabei heißt  $\mathfrak{M}$  vollinvariant, wenn die Durchschnitte  $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{L}_m \cap \mathfrak{M}$  gegen lineare Transformation der Erzeugenden invariant bleiben und jeder Homomorphismus von  $\mathfrak{L}$  in sich jeden Teilmodul  $\mathfrak{M}_m$  in das von  $\mathfrak{M}_m$  in  $\mathfrak{L}$  erzeugte Ideal  $\{\mathfrak{M}_m\}$  abbildet. Ein reduzierter freier Liescher Ring  $L \cong \mathfrak{L}/\mathfrak{M}$  läßt sich auch kennzeichnen durch das (vollinvariante) Ideal  $\mathfrak{M}$  der in ihm gültigen Regeln, d. h. die Menge derjenigen Lieschen Polynome  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , die bei Substitution beliebiger Elemente  $x_j \in L$  verschwinden. Ein Liescher Ring ist reduziert frei, wenn jede Relation zwischen den Erzeugenden eine Regel ist. Die oben angedeutete Verbindung mit dem Grupperring  $\mathfrak{S}_m$  ermöglicht mittels der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_m$  und der vollen linearen Gruppe  $m$ -ter Dimension eine Reduktion der Regeln eines reduzierten freien Lieschen Ringes  $L$  auf ein System aus Regeln besonders einfacher Gestalt und führt damit auf eine Kennzeichnung und systematische Übersicht über die reduzierten freien Lieschen Ringe gleicher Erzeugendenzahl. Bemerkungen zum Zusammenhang mit der Theorie der freien und der reduziert freien Gruppen.

W. Specht.

**Asano, Keizo und Takasaburo Ukegawa:** Ergänzende Bemerkungen über die Arithmetik in Schieferringen. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 3, 1—7 (1952).

Let  $\mathfrak{o}^*$  be a ring with unity 1 and  $\mathfrak{o}$  be a subring of  $\mathfrak{o}^*$  containing 1. Denote by  $\mathfrak{f}$  the largest ideal of  $\mathfrak{o}^*$  contained in  $\mathfrak{o}$ . If  $\Sigma$  is the set of all ideals  $\mathfrak{a}$  of  $\mathfrak{o}$  such that  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$  and if  $\Sigma^*$  is similarly defined for  $\mathfrak{o}^*$ , then  $\Sigma$  and  $\Sigma^*$  are isomorphic as lattices and as multiplicative semigroups under the correspondence  $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{o}^* \mathfrak{a}$ . Assuming that  $\mathfrak{o}$  and  $\mathfrak{o}^*$  are equivalent maximal orders of a ring  $S$ , and that the usual finiteness conditions hold, the authors develop the arithmetic of  $\mathfrak{o}$  relative to  $\mathfrak{f}$ . A typical result is as follows: each  $\mathfrak{o}$ -ideal  $\mathfrak{a}$  has a unique representation  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \mathfrak{a}_0$  where the  $\mathfrak{p}_i$  are regular prime ideals and  $\mathfrak{a}_0$  is a divisor of some power of  $\mathfrak{f}$ .

R. E. Johnson (M. R. 14, 839).

\***Kandô, Tetsuo:** Strong regularity in arbitrary rings. Nagoya math. J. 41 51—53 (1952).

**Isiwata, Takesi:** Linearization of topological groups and ordered rings. Kôda math. Sem. Reports 1952, 33—35 (1952).

The rings of integers and of real numbers are characterized abstractly within the class of simply ordered rings. Thus, for the integers, the presence of a strong unit and of a positive atomic element is sufficient. G. Birkhoff (M. R. 14, 718).

**Dürbaum, Hansjürgen:** Beiträge zur allgemeinen Bewertungstheorie. Diss. math.-naturw. Fakultät Münster 2, 8—9 (1952).

Brief abstract of a thesis in which valuations of skew fields are generalized by assuming instead of the usual subadditivity only continuity of addition in the topology induced by the valuation. The values are taken in a fully ordered group completed by zero. Among the topics considered are the continuation of such a generalized valuation from a skew field to an algebraic extension; the integral elements with respect to such valuations, and maximal orders; the characterization of those topologies of a skew field that are induced by valuations.

B. H. Neumann.

**Lang, Serge:** Hilbert's nullstellensatz in infinite-dimensional space. Proc. Amer. math. Soc. 3, 407—410 (1952).

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,  $A$  eine Indexmenge der Mächtigkeit  $\alpha$ ,  $\mathfrak{o} = k[x_\alpha]$  der Polynomring der Unbestimmten  $x_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) über  $k$ . Verf. zeigt zunächst, daß die folgenden, bei endlichem  $\alpha$  bekanntlich richtigen Aussagen auch bei unendlichem  $\alpha$  jedenfalls äquivalent sind: 1. Wenn ein Polynom  $f \in \mathfrak{o}$  an allen algebraischen (d. h. in  $k$  gelegenen) Nullstellen des Ideals  $\mathfrak{a}$  von  $\mathfrak{o}$  verschwindet, so ist  $f^q \in \mathfrak{a}$  für eine natürliche Zahl  $q$  (Hilbertscher Nullstellensatz). 2. Jedes Ideal  $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$  hat eine algebraische Nullstelle. 3. Eine Ringerweiterung  $k[\xi_\alpha]$  durch Elemente  $\xi_\alpha$  eines Oberkörpers von  $k$  ist genau dann ein Körper, wenn alle  $\xi_\alpha$  in  $k$  liegen (O. Zariski, dies. Zbl. 32, 260). Danach wird bewiesen, daß diese Aussagen genau dann richtig sind, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: (i)  $\alpha$  ist endlich. (ii)  $\alpha$  ist kleiner als der Transzendenzgrad von  $k$  über seinem Primkörper. Der Beweis stützt sich auf folgendes Lemma: Ist  $\alpha$  unendlich, so besitzt jedes Ideal  $\mathfrak{a}$  eine Basis aus höchstens  $\alpha$  Elementen. Ferner wird das Zornsche Lemma benutzt.

H. Orsinger.

**Krull, Wolfgang:** Jacobson'sches Radikal und Hilbertscher Nullstellensatz. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 56—60 (1952).

Ein beliebiger (im allgemeinen nichtkommutativer, aber assoziativer) Ring ist genau dann subdirekte Summe von einfachen Ringen, wenn sein Jacobsonisches Radikal verschwindet (N. Jacobson, dies. Zbl. 60, 73, letztes Ref.). Verf. weist darauf hin, daß dieses Gegenstück zum zweiten Wedderburnschen Struktursatz für hyperkomplexe Systeme keine ebenso befriedigende Strukturaussage enthält. Er zeigt dann, daß bei durchgehender Beschränkung auf kommutative Ringe  $\mathfrak{R}$  mit Einselement eine Verschärfung des Jacobsonischen Begriffs eines Ringes mit verschwindendem Radikal zwar auch nicht zu Strukturaussagen, aber zu anderen bedeutenden Ergebnissen führt. Verf. nennt  $\mathfrak{R}$  einen „Jacobsonischen Ring“, wenn für jedes Ideal  $\mathfrak{a}$  aus  $\mathfrak{R}$  das gewöhnliche Radikal (= Durchschnitt der minimalen Primoberideale von  $\mathfrak{a}$ ) gleich dem Jacobsonischen Radikal (= Durchschnitt der maximalen Primoberideale von  $\mathfrak{a}$ ) ist. Es gilt der „Permanenzsatz“: Mit  $\mathfrak{R}$  ist auch jede Ringerweiterung  $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$  Jacobsonisch; jeder Homomorphismus von  $\mathfrak{S}$  auf einen Körper  $A$  bildet  $\mathfrak{R}$  auf einen Körper ab, über dem  $A$  algebraisch ist. Dieser Satz kann als denkbar weitgehende Verallgemeinerung des Hilbertschen Nullstellensatzes aufgefaßt werden. — Bei nicht Jacobsonischen Ringen, speziell Stellenringen, versagt die Betrachtung der Durchschnitte maximaler Primideale („spezielles Jacobsonisches Prinzip“), kann aber im Falle der „Noetherschen Ringe“ (Ringe mit Maximalbedingung) durch die Betrachtung der Durchschnitte beliebiger Primideale („verallgemeinertes Jacobsonisches Prinzip“) ersetzt werden. Dies führt zu dem „Lokalen Durchschnittssatz“: In einem Noetherschen Ring ist jedes Primunterideal des Primideals  $\mathfrak{p}$  Durchschnitt von unmitttelbaren Primunteridealen von  $\mathfrak{p}$ . Die Permanenzaussage ist hier trivial, da mit  $\mathfrak{R}$  auch  $\mathfrak{S}$  Noethersch ist. — Die beim Beweis des Permanenzsatzes wesentliche Reduktion auf Polynomringe legt den Versuch nahe, die Dimensionstheorie der Primideale aus Polynomringen über Körpern zu übertragen auf solche über Ringen. Für Ringe  $\mathfrak{R}$ , die gleichzeitig Noethersch und Jacobsonisch sind, ergibt sich der „Dimensionssatz“: Es sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal aus  $\mathfrak{R}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $\mathfrak{p}^{(r)} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{R}$  das darunter liegende Primideal aus  $\mathfrak{R}$ ,  $d$  und  $d^{(r)}$  die zugehörigen Dimensionen. Dann gilt  $d^{(r)} \leq d \leq d^{(r)} + n$ , und beide Grenzfälle kommen wirklich vor. Die Dimensionsdifferenz  $d - d^{(r)}$  kann (für  $d^{(r)} \neq \infty$ ) genau so körpertheoretisch gedeutet werden wie die Dimension  $d - d - 0$  im Spezialfall eines Polynomringes über einem Körper. — In Polynomringen über Körpern gilt weiter der „Längensatz“ (W. Krull, dies. Zbl. 17, 149, erstes Ref.): Zwei Primoberidealketten mit gleichem Anfangs- und Endglied, die nicht mehr verfeinert werden können, besitzen die gleiche Länge. Ungelöst ist das Problem der Permanenz des Längensatzes: Es sei  $\mathfrak{R}$  ein gleichzeitig Noetherscher und Jacobsonischer Ring, für den der Längensatz gilt. Gilt dann der Längensatz auch für  $\mathfrak{R}[x_1, \dots, x_n]$ ? Diese Permanenz wäre gesichert, wenn eine gewisse Vermutung über Noethersche Stellenringe bewiesen werden könnte. — Aus der kritischen Analyse der gewonnenen richtungweisenden Ergebnisse werden wichtige Folgerungen und Vorschläge für die Weiterentwicklung der Theorie der kommutativen und nichtkommutativen Ringe gewonnen.

H. Orsinger.

Iséki, Kiyoshi: Sur le  $G$ -radical d'un anneau topologique. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1938—1939 (1952).

Iséki, Kiyoshi: On the Brown-McCoy radical in topological rings. Anais Acad. Brasil Ci. 25, 79—86 (1953).

Sei  $R$  ein assoziativer Ring und für  $a \in R$  sei  $G(a)$  das von allen  $ax - x$ ,  $x \in R$ , erzeugte zweiseitige Ideal.  $a$  heißt  $G$ -regulär, falls  $a \in G(a)$ ; ein Ideal  $I \subset R$  heißt  $G$ -regulär, falls alle Elemente aus  $I$   $G$ -regulär sind. Das  $G$ -Radikal von  $R$  ist die Vereinigung aller  $a \in R$ , die ein  $G$ -reguläres Hauptideal  $(a)$  erzeugen. Ein zweiseitiges Ideal  $I$  heißt verallgemeinert regulär, wenn modulo  $I$  eine Linkseinheit existiert. Satz 2: Das  $G$ -Radikal ist der Durchschnitt aller maximalen verallgemeinert regulären Ideale. — Der zweite Teil der Arbeit enthält Untersuchungen über das  $G$ -Radikal in topologischen Ringen.  $R$  heißt  $G$ -Ring, wenn die  $G$ -regulären Elemente eine Nullumgebung bilden. Jedes maximale verallgemeinert reguläre Ideal eines  $G$ -Ringes ist abgeschlossen und folglich auch das  $G$ -Radikal. Enthält  $R$  kein abgeschlossenes Ideal, so ist  $R$  entweder  $G$ -Radikalring oder  $G$ -halbeinfach mit Einselement.

H. Leptin.

Borevič, Z. I.: Die Homologiegruppen der  $p$ -Erweiterungen eines regulären lokalen Körpers. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 427—436 (1952) [Russisch].

Es sei  $k$  ein lokaler Körper, d. h. eine endliche Erweiterung des Körpers der  $p$ -adischen Zahlen. Von  $k$  werde vorausgesetzt, daß die primitiven  $p$ -ten Einheitswurzeln nicht darin enthalten sind. Ferner sei  $K$  eine endliche normale Erweiterung



von  $k$ , deren Galoisgruppe  $G$  eine  $p$ -Gruppe ist. Bezeichnet man mit  $K^*$  die multiplikative Gruppe der Elemente  $\neq 0$  aus  $K$ , so wird  $G$  in natürlicher Weise zum Operatorenbereich für  $K^*$ , und man kann die Kohomologiegruppen  $H^n(G, K^*)$  definieren. Verf. beweist für  $n \geq 3$  die Isomorphie  $H^n(G, K^*) \cong H^{n-2}(G, J)$ , wobei  $J$  eine unendliche zyklische Gruppe mit  $G$  als identischem Operatorenbereich bedeutet.

R. Kochendörffer.

Vandiver, H. S.: A development of associative algebra and an algebraic theory of numbers. I. Math. Mag. 25, 233—250 (1952).

Besprechung in diesem Zbl. 52, 253.

Rose, I. H.: On the cohomology theory for associative algebras. Amer. J. Math. 74, 531—546 (1952).

The author is concerned here with certain conjectures made by G. Hochschild in respect of his cohomology theory of associative algebras [Ann. of Math., II. Ser. 46, 58—67 (1945); 47, 568—579 (1946); this Zbl. 29, 342]. These may be stated in the more modern terminology of homological algebra by means of the tensor product of algebras and the notion of the dimension,  $\dim A$ , of an associative algebra  $A$ . Let then  $A$  be an associative algebra over a field  $F$ , and  $P$  a vector space over  $F$  which is also a two sided  $A$ -module. Set  $\dim A \leq m$  if  $H^{m+1}(A, P) = 0$  for all  $P$ , and  $\dim A = m$  if  $\dim A \leq m$  but not  $\leq m-1$ . Conjecture 1: If  $H$  is an algebra with a unit element, and if  $\dim H = 1$ , then  $\dim (H \otimes H \otimes \cdots \otimes H)$ , ( $n$  factors), is not  $\leq n-1$ . Hochschild proved this for  $n = 2$ ; the author proves it for any  $n$  and also the consequence, that in fact  $\dim (H \otimes H \otimes \cdots \otimes H) = n$ , i. e. there exist algebras of all finite dimensions. The proof follows from consideration of the more general Conjecture 2: If  $A$  and  $B$  are associative algebras over  $F$ , with  $\dim A = m$  and  $\dim B = n$ , then  $\dim (A \otimes B) = m + n$ . This is of course implied by the following two conjectures. Conjecture 2 a: If  $\dim A \leq m$  and  $\dim B \leq n$ , then  $\dim (A \otimes B) \leq m + n$ . Conjecture 2 b: If  $\dim A$  is not  $\leq m$  and  $\dim B$  is not  $\leq n$  then  $\dim (A \otimes B)$  is not  $\leq m + n + 1$ . Conjecture 2 a is proved for all algebras with unit elements. Conjecture 2 b is proved in case  $m = -1$  provided  $A$  has a unit element, and in case  $m = 0$  provided both  $A$  and  $B$  have unit elements. The question as to whether Conjecture 2 b, and hence Conjecture 2, is true in general for algebras with unit elements is left open. The author promises to publish a counter-example to Conjectures 2 b and 2 in case  $A$  and  $B$  do not have unit elements. —

W. H. Cockcroft.

Hopf, H.: Einige Anwendungen der Topologie auf die Algebra. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 11, 75—91 (1952).

### Zahlkörper. Funktionenkörper:

Fischer, Wilhelm: Über die Zetafunktion des reell-quadratischen Zahlkörpers. Math. Z. 57, 94—115 (1952).

Ist  $K$  ein reell-quadratischer Zahlkörper, so beweist Verf. für die Zetafunktion  $\zeta(s, \mathbb{R})$  einer Idealklasse (und damit auch für die Dedekindsche Zetafunktion  $\zeta_K(s)$  von  $K$ ) die folgende approximative Funktionalgleichung:

$$\zeta(s, \mathbb{R}) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ N a < X}} N a^{-s} + \psi(s) \sum_{\substack{b \in \mathbb{R}^{-1} \\ N b < Y}} N b^{s-1} + O(X^{1/2-\sigma});$$

( $N a$  = Absolutnorm). Hierbei ist  $s = \sigma + i t$ ,  $t^2 = 4 \pi^2 d^{-1} X Y$ ,  $X \geq 1$ ,  $Y \geq 1$ ,  $c_1 \leq X Y^{-1} \leq c_2$ ,  $-M < \sigma < M$ ,  $\psi(s) = 4 d^{1/2-s} (2\pi)^{2(s-1)} \sin^2(\frac{1}{2} \pi s) \Gamma^2(1-s)$  und  $d$  die Diskriminante von  $K$ , und die Konstante im Fehlerglied hängt nur von  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $M$  und  $K$  ab. — Der Beweis stützt sich auf die für  $F(X, Y, s) = \zeta(s, \mathbb{R}) - \sum_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ N a < X}} N a^{-s} - \psi(s) \sum_{\substack{b \in \mathbb{R}^{-1} \\ N b < Y}} N b^{s-1}$  gültige Formel:

$F(X, Y, s-1) - X \cdot F(X, Y, s) = O(X^{1-\sigma})$ . — Als Anwendungen folgen Abschätzungen von  $|\zeta(s, \mathbb{R})|$  im kritischen Streifen, sowie des Mittelwertes von  $|\zeta_K(\frac{1}{2} + i t)|^2$ . E. Lamprecht.

Ankeny, N. C., E. Artin and S. Chowla: The class-number of real quadratic number fields. Ann. of Math., II. Ser. 56, 479—493 (1952).

Es sei  $\Omega = \mathbb{P}(\sqrt{d})$  der reellquadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante  $d$ . Es bezeichne  $h$  die Klassenzahl,  $\varepsilon = \frac{1}{2}(t + u\sqrt{d}) > 1$  die Grundeinheit und  $\eta$  die Kreiseinheit von  $\Omega$ , sowie  $\chi(x) = \left(\frac{d}{x}\right)$  das Kroneckersymbol und  $[x]$  die größte ganze Zahl  $\leq x$ . Mit Hilfe von  $\log x = (x^p - 1)/p \bmod p$  für  $p$ -Exponenten  $w_p(x-1) \geq 1/(p-1)$  werden aus der arithmetischen Klassenzahlformel  $\varepsilon^{-h} = \eta$  für Primzahlen  $p \nmid d = m \cdot p$  durch  $p$ -adische Logarithmierung Kongruenzen für die Klassenzahl hergeleitet: Für  $m > 1$  und  $p > 3$  gilt (Satz 1)

$$-2h \frac{u}{t} \equiv \sum_{0 < x < d} \frac{\chi(x)}{mx} \left[ \frac{x}{p} \right] \bmod p;$$

für  $m > 1$  und  $p = 3$  ist die linke Seite durch  $-2h(u/t)(1+m)$  zu ersetzen. Satz 3 enthält entsprechende Kongruenzen für den Fall einer Primdiskriminante  $d = p$ . Für  $p = 3$  und quadratfreies  $m$  ergibt sich (Satz 2) die bemerkenswerte Kongruenz  $-h u/t \equiv H \bmod 3$ , wo  $H$  die Klassenzahl des Körpers  $\mathbb{P}(\sqrt{-m})$  bezeichnet. Satz 4 stellt eine Kongruenzbeziehung zu einer Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen her: Werden für  $d = m \cdot p$  und  $p > 3$  der Charakter  $\psi \bmod m$  durch  $\chi(n) = \left(\frac{n}{p}\right) \psi(n)$  und die Zahlen  $C_n$  durch

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{C_n z^n}{n!} = \frac{1}{e^{mz} - 1} \sum_{n=1}^m \psi(n) e^{nz}$$

definiert, so ist für  $p > m$ :  $-2h u/t \equiv C_{(p-3)/2} \bmod p$ . Es wird die Frage aufgeworfen, ob für Primdiskriminanten  $d = p$  stets  $u \neq 0 \bmod p$  ist, und es wird mitgeteilt, daß dies für alle  $p \equiv 5 \bmod 8$ ,  $p < 2000$  zu bejahen ist. H. W. Leopoldt.

**Kinohara, Akira:** On the derivations and the relative differentials in algebraic number fields. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 261—266 (1952).

After the idea of A. Weil and the reviewer (this Zbl. 44, 267) the author gives another proof of the characterization of the relative different  $\mathfrak{D}_{K/k}$  of a number field  $K$  over  $k$  by the module of derivations of the principal order  $\mathfrak{O}$  of  $K$ . The main theorem is the following. Let  $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}, \mathfrak{D}/\mathfrak{P}')$  be the module of all derivations  $D$  of  $\mathfrak{O}$  with values in  $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}'$ , where  $\mathfrak{P}$  is a prime ideal of  $\mathfrak{O}$ , such that  $D(\mathfrak{o}) = 0$  for the principal order  $\mathfrak{o}$  of  $k$ . Let  $\theta$  be an integral primitive element of  $K/k$ . Then the  $\mathfrak{D}$ -isomorphism  $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{P}') \cong \mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\theta], \mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{P}')$  holds. Since  $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\theta], \mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{P}')$  has a simple structure we can determine  $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{P}')$  explicitly which gives another proof of the above mentioned characterization. Y. Kawada.

**Satake, Ichiro:** On a generalization of Hilbert's theory of ramification. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 2, 23—39 (1952).

Zunächst wird die Hilbert-Herbrandsche Verzweigungstheorie auf den Fall unendlicher galoisscher Erweiterungen eines diskret bewerteten Körpers ausgedehnt. Dann wird gezeigt, daß diese Erweiterung der Theorie auch noch im Fall der  $H_1$ -Erweiterungen halb-diskreter Körper möglich ist. Dabei sind die  $H_1$ -Erweiterungen durch ein besonders einfaches Stetigkeitsverhalten ihrer Verzweigungsfunktionen charakterisiert, und ein Körper heißt halb-diskret, wenn er Zwischenkörper eines diskret bewerteten Körpers und einer  $H_1$ -Erweiterung ist. Diese Betrachtungen sind speziell bei den abelschen Erweiterungen endlicher Zahlkörper anwendbar (vgl. Tamagawa, dies. Zbl. 52, 35) und liefern einen neuen Beweis für den Normenrestsatz von Hasse. H. Reichardt.

**\*Terada, Fumiyuki:** On the principal genus theorem concerning the Abelian extensions. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 141—152 (1922).

**Iwasawa, Kenkiti und Tsuneo Tamagawa:** On the group of automorphisms of a function field. Correction. J. math. Soc. Japan 4, 100—101 (1952).

In Berichtigung einer Beweislücke einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 44, 269) zeigen Verf.: Ist  $K$  ein algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen vom Geschlecht  $g > 0$  mit algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper  $k$  von Primzahlcharakteristik, so hat jeder  $k$ -Automorphismus  $\sigma$  von  $K$ , der einen Primdivisor  $\mathfrak{p}$  von  $K$  fest läßt, endliche Ordnung. E. Lamprecht.



Iwasawa, Kenkichi and Tsuneo Tamagawa: Correction: On the paper "On the group of automorphisms of a function field". (This journal, vol. 3 (1951), pp. 137—147). J. math. Soc. Japan 4, 203—204 (1952).

Angabe einer nur von  $K$  abhängigen oberen Schranke für die Ordnung des Automorphismus  $\sigma$  im obenstehenden Referat. *E. Lamprecht.*

Roquette, Peter: Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers. Arch. der Math. 3, 343—350 (1952).

Verf. zeigt unter Richtigestellung einiger Ergebnisse von Iwasawa und Tamagawa (dies. Zbl. 44, 269) folgendes: 1. Ist  $K$  ein algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen mit dem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper  $k$  der Charakteristik  $p \neq 0$ , so gibt es einen rationalen Teilkörper  $P$  und einen Primdivisor  $\mathfrak{p}$  von  $K$ , so daß  $p \nmid [K:P]$ ,  $p | e_{\mathfrak{p}}$  (Verzweigungsordnung von  $\mathfrak{p}$  über  $P$ ). — 2. Ist zusätzlich das Geschlecht  $g > 0$ , so hat jeder  $k$ -Automorphismus  $\sigma$  von  $K$ , der einen Primdivisor  $\mathfrak{q}$  von  $K$  fest läßt, endliche Ordnung (vgl. vorstehendes Referat) und diese ist durch eine nur von  $K$  abhängige Schranke beschränkt. *E. Lamprecht.*

Néron, André: Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps. Bull. Soc. math. France 80, 101—166 (1952).

Let  $A$  be an Abelian variety, defined over a field  $K$ . Then the  $K$ -rational points of  $A$  form a subgroup  $\gamma(K)$  of  $A$ . If  $A$  is the Jacobian variety of an algebraic curve  $C$  defined over  $K$ , then the rank (= minimal number of generators) of  $\gamma(K)$  is called the rank of  $C$  with respect to  $K$ . In 1928, A. Weil showed that  $\gamma(K)$  has finite rank if  $K$  is a finite algebraic number field [Acta Math. 52, 281—315 (1929)]. The present paper of Néron contains: (1) A non-analytic proof of Weil's theorem, based on the arithmetic on algebraic varieties (Northcott, Weil) and on the algebraic theory of Abelian varieties; (2) Theorem of base for an arbitrary algebraic variety  $U$ , i. e. the following: The divisor class group of  $U$  with respect to algebraic equivalence,  $G(U)/G_a(U)$ , is finitely generated (this theorem has been obtained by Severi in the classical case); (3) Generalization of Weil's theorem to the case when  $K$  is finitely generated over the prime field (of arbitrary characteristic); (4) Theorems on the existence of curves with given ground field  $K$  (of charac. zero), with given genus  $g$  and with rank not less than a given integer  $r$ , for various choices of  $K$ ,  $g$  and  $r$  (for example,  $K$  = rational number field,  $g$  arbitrary and  $r = 3g + 6$ ). — Note that, in proving Weil's theorem or its generalization (3), one may restrict oneself to the case of Jacobian varieties, for one can always find curves  $C_1, \dots, C_s$  on  $A$  with Jacobian varieties  $J_1, \dots, J_s$  and an Abelian subvariety  $B$  of  $J_1 \times \dots \times J_s$  isogeneous with  $A$ , all being defined over a finite algebraic extension of  $K$ . In order to prove (2) and (3), the author uses fibre varieties (in wider sense) fibred by curves or Jacobian varieties. [This interesting and powerful method was further developed by Néron and Samuel, Ann. Inst. Fourier 4, 1—30 (1954) and by Igusa, Amer. J. Math. 78, 171—199 (1956)]. As for (2), the author proves first that, if the theorem holds for  $U^n$ , then it holds for any rational transform of  $U$  of the same dimension. In particular, one may assume, by birational transformation, that  $U$  is a variety fibred by curves, i. e. a subvariety of  $\mathbb{M}^{n-1} \times L$  projecting onto  $\mathbb{M}$ , where  $\mathbb{M}$  is a normal variety and  $L$  is a projective space. One can assume that the fibre  $P \times C(P) = (P \times L) \cdot U$  is an irreducible nonsingular curve for almost all  $P \in \mathbb{M}$ . Denoting by  $J(P)$  the Jacobian variety of  $C(P)$  immersed in a projective space  $S$ , there is a subvariety  $\mathfrak{Z}$  of  $\mathbb{M} \times S$  such that  $(P \times S) \cdot \mathfrak{Z} = P \times J(P)$  for almost all  $P$ . Let  $H_0$  be the group of  $U$ -divisors  $D$  such that  $\text{pr}_{\mathbb{M}}(D) = 0$ , and  $H$  be the subgroup of  $H_0$  formed by the divisors which have no component that projects onto  $\mathbb{M}$ . Then  $H_0 \supset G_a(U)$  and  $G(U)/H_0$  is free cyclic. Set  $H_a = H + G_a(U)$ . The finiteness of the rank of  $H_0/H_a$  is proved by the method of infinite descent, making use of geometric properties of  $\mathfrak{Z}$ . The proof is closely related to that of Weil's theorem, but is somewhat complicated. [The author published later another proof which makes the parallelism between the two theorems more evident: Proc. internat. Sympos. algebraic number theory, Tokyo-Nikko Sept. 1955, 139—154 (1956).] Finally, the same problem for  $H_a/G_a(U)$  can easily be reduced to that of  $G(\mathbb{M})/G_a(\mathbb{M})$ . Thus the theorem of base is proved by induction on  $\dim U$ . — In proving (3) (in the case of the Jacobian variety  $J/K$  of a curve  $C/K$ ), since  $K$  is a function field over an absolutely algebraic field  $k$ , one can take a normal model  $\mathbb{M}$  of  $K/k$  and construct a fibre variety  $\mathfrak{C}$  (similar to the  $U$  above) with base  $\mathbb{M}$  and generic fibre  $C$ . Prop. 3 of Chap. II shows that  $\gamma(K) \cong H_0(k)/H_1(k)$ , where  $H_0(k)$  (resp.  $H_1(k)$ ) denotes the group consisting of the  $k$ -rational divisors of  $H_0$  (resp.  $H_1 = H + G_1(C)$ ). Then the finiteness of the rank of  $H_a(k)/H_1(k)$  can be reduced to Weil's theorem or to the finiteness of the rational points over a finite field (by constructing a rational isomorphism of  $H_a/H_1$  into a Jacobian variety defined over an absolutely algebraic field), while that of  $H_0/H_a$  is already proved in (2). Chap. III and IV, where the field charac. is assumed to be zero, are of arithmetic nature and can be read almost independently of the preceding chapters.

*Y. Akizuki.*

## Zahlentheorie:

● Davenport, H.: *The higher arithmetic. An introduction to the theory of numbers.* London: Hutchinson's University Library 1952. VIII, 172 p. 8/6 s.

In diesem Buch wird eine Einführung in die rationale Zahlentheorie in 7 Kapiteln gegeben: I Faktorzerlegung und Primzahlen, II Kongruenzen, III Quadratische Reste, IV Kettenbrüche, V Summe von Quadraten, VI Quadratische Formen, VII Einige Diophantische Gleichungen. Die ersten beiden Kapitel bringen das für eine Einführung Notwendige über Primzahlen und Kongruenzen. Sodann wird der Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, und zwar in Anlehnung an A. Scholz, (Einführung in die Zahlentheorie, dies. Zbl. 67, 20) geführt. Die Kettenbrüche werden ausführlich behandelt; sie werden für die Lösung der Diophantischen Gleichung  $ax - by = 1$  und der Pellischen Gleichung  $x^2 - Ny^2 = 1$  herangezogen. Die Frage nach der Darstellung einer natürlichen Zahl als Summe von  $n$  Quadraten wird für  $n = 2$  und  $n = 4$  beantwortet; unter den Konstruktionen der Lösungen im Falle  $n = 2$  wird auch die von Legendre, welche auf den Kettenbrüchen basiert, angegeben. In dem Kapitel über quadratische Formen wird die Reduktionstheorie nur für binäre definite Formen durchgeführt. Zum Schluß werden die Diophantischen Gleichungen  $ax^2 + by^2 = z^2$  und  $x^3 + y^3 = z^3 + w^3$  behandelt. Das Buch hat seine Absicht, eine Einführung zu geben, in vollem Umfange erreicht. Die Beweise werden in ausführlicher und durchsichtiger Form gebracht. Die Sätze werden durch Beispiele illustriert und in ihrer Bedeutung vielfältig diskutiert. Die zahlreichen historischen Bemerkungen bieten einen besonderen Reiz. Die ausführlichen literarischen Hinweise regen zu weiterer Beschäftigung mit den hier behandelten Fragen an.

B. Schoeneberg.

Straus, E. G.: *Functions periodic modulo each of a sequence of integers.* Duke math. J. 19, 379—395 (1952).

Let  $M$  be a set of increasing positive integers  $m_1, m_2, \dots$ . An integral valued function  $f(x)$  is said to be periodic of type I mod  $M$ , if for each  $i$  there is a positive integer  $\pi_i$  such that  $(*) f(x + \pi_i) \equiv f(x) \pmod{m_i}$  for all integers  $x$ . Similarly  $f(x)$  is said to be periodic of type II mod  $M$ , if the congruence  $(*)$  holds for all  $x > x_0$ , for some  $x_0$ ; and is said to be periodic of type III mod  $M$ , if the congruence holds for all  $x > x_i$ , for some sequence  $x_1, x_2, \dots$ . It is shown that each integral valued polynomial is periodic of type I mod the set of all positive integers. Further each function

of the form  $\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m (p_{ij}(x))^{q_{ij}(x)}$ , where  $p_{ij}(x), q_{ij}(x)$  are integral valued polynomials and

$q_{ij}(x) \geq 0$  for  $x > x_0$ , is periodic of type II mod all primes and of type III mod all positive integers. As a corollary it is deduced that no such function can represent prime numbers for all sufficiently large values of  $x$ , unless it takes only a finite number of values. Similar results hold for functions satisfying certain special difference equations. The structure of the different types of periodic functions is studied, and it is shown, under appropriate conditions, that there are continuum many functions periodic of type I with assigned periods modulo each positive integer.

A function  $f(x)$  is said to be prime mapping if  $f(p)$  is prime for all sufficiently large primes  $p$ . It is shown that the only prime mapping non-constant integral valued polynomial is  $x$ . The last section, which uses rather deeper methods, studies, a problem of D. H. Lehmer. What are the functions which map every complete residue system modulo almost every prime onto a complete residue system modulo that prime? It is shown that every such function is of the form  $ax + b$  where  $a$  is divisible only by exceptional primes and  $b$  is an arbitrary integer.

C. A. Rogers.

Singh, Daljit: *The numbers  $L(m, n)$  and their relations with prepared Bernoullian and Eulerian numbers.* Math. Student 20, 66—70 (1952).

Singh, Daljit: *On the divisibility of Eulerian and prepared Bernoullian numbers by prime numbers.* Math. Student 20, 71—73 (1952).

In der Entwicklung  $\tan x + \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!}$  sind die  $S_{2n}$  (bis auf das Vorzeichen) die Eulerschen und die  $S_{2n+1}$  die „prepared“ Bernoullischen Zahlen. Die im Titel der ersten Note genannten Funktionen  $L(m, n)$  sind definiert durch

$s^r = \sum_{k=1}^r L(r, k) \binom{s+k-1}{r}$ . Für diese und ähnliche Funktionen werden Rekursions-



formeln gegeben, sowie Summenformeln, die die  $S_n$  darstellen. Am Schluß der ersten Note sind Tabellen für die genannten Funktionen gegeben. — In der zweiten Note werden folgende beiden (bereits bekannten) Kongruenzen bewiesen:  $S_{p+r} \equiv (-1)^{(p-1)/2} S_{r+1} \pmod{p}$ ,  $(-1)^{(p+1)/2} S_{p-2} \equiv \sum_{v=1}^{(p-1)/2} (2v-1)^{p-2} \pmod{p}$ ,  $p > 2$  Primzahl,  $r \geq 0$ . F. Dueball.

**Carletti, Ernesto:** Definizione della forma  $F_m^n$ ; sue proprietà elementari; e deduzione dei teoremi di Fermat, di Wilson, e di Staudt e Clausen. Periodico Mat., IV. Ser. **30**, 153—159 (1952).

Es sei  $F_m^n(x_1, \dots, x_m)$  die Summe der durch  $x_1 \cdots x_m$  teilbaren Glieder des Polynoms  $(x_1 + \cdots + x_m)^n$ , ferner  $U_m^n = F_m^n(1, \dots, 1)$ . Verf. leitet ganz elementar arithmetische Eigenschaften dieser Ausdrücke her, aus denen man u. a. den kleinen Fermatschen Satz (für Primzahlmoduln) und den Wilsonschen Satz folgern kann. Sodann benutzt er sie zu einem Beweis des Staudt-Clausenschen Satzes über die Bernoullischen Zahlen, welcher ähnlich verläuft wie der von Staudtsche [J. reine angew. Math. **21**, 372—374 (1840)]. H. Orsinger.

**Ore, Oystein:** The general Chinese remainder theorem. Amer. math. Monthly **59**, 365—370 (1952).

Verf. betrachtet die simultanen Kongruenzen  $(1) x \equiv a_i \pmod{m_i}$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Sei  $d_{ij} = (m_i, m_j)$  der größte gemeinsame Teiler von  $m_i$  und  $m_j$ ,  $M = \{m_1, \dots, m_k\}$  das kleinste gemeinsame Vielfache von  $m_1, \dots, m_k$ . Bekanntlich ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (1), daß  $a_i \equiv a_j \pmod{d_{ij}}$  für alle Kombinationen  $i, j$  gilt. Im Falle der Lösbarkeit ist die Lösung  $\pmod{M}$  eindeutig. In der vorliegenden Arbeit wird der folgende Satz bewiesen: Die Lösung der Kongruenzen (1) kann dargestellt werden in der Gestalt  $(2) x \equiv \sum_{i=1}^k a_i c_i \frac{M}{m_i} \pmod{M}$ ,

wobei die  $c_i$  ganze Zahlen sind, die  $\sum_{i=1}^k c_i \frac{M}{m_i} \equiv 1$  erfüllen. Es schließen sich einige Bemerkungen über Abelsche Gruppen. H. J. Kanold.

**Dénes, Peter:** Beweis einer Vandiverschen Vermutung bezüglich des zweiten Falles des letzten Fermatschen Satzes. Acta Sci. math. **14**, 197—202 (1952).

Der wohlbekannte Vandiversche Satz, daß die Fermatsche Gleichung  $\xi^p + \eta^p = \varepsilon_0 A^{np} \psi^p$  im zweiten Fall mit relativ primen Zahlen  $\xi, \eta, \psi$  aus dem reellen Unterkörper  $\Omega(\zeta + \zeta^{-1})$  des  $p$ -ten Kreisteilungskörpers  $\Omega(\zeta)$  unlösbar ist, wenn nur die Klassenzahl von  $\Omega(\zeta + \zeta^{-1})$  nicht durch  $p$  teilbar und keine der Bernoullischen Zahlen  $B_{np}$  ( $n = 1, \dots, (p-3)/2$ ) durch  $p^3$  teilbar ist, wird von Verf. in dem Sinne verschärft, daß, wie von Vandiver vermutete, die Bedingung der Teilerfremdheit der Zahlen  $\xi, \eta, \psi$  in diesem Satz weggelassen werden kann. S. Kuroda.

• **Hemer, Ove:** On the Diophantine equation  $y^2 - k = x^3$ . (Diss.) Uppsala: Almqvist & Wiksells AB 1952. 101 S. Schwed. Kr. 10,—.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird gezeigt, daß die Gleichung  $(1) y^2 - k f^2 = x^3$  mit einer binären kubischen Form äquivalent ist. Diese Form wird aus der Gleichheit der irrationalen Teile von  $\pm y + f\sqrt{k} = \varepsilon(a + b\sqrt{k})^3$  erhalten, wo  $\varepsilon$  eine Einheit von  $K(\sqrt{k})$  ist. Die Diskriminante dieser Form ist positiv oder negativ, wenn  $k < 0$  bzw.  $> 0$  ist. Im letzteren Falle ergeben sich die Resultate aus der von T. Nagell und B. Delauney entwickelten Theorie von kubischen Zahlkörpern mit genau einer Fundamenteinheit (Nagell, L'analyse indéterminée de degré supérieur, Paris 1929, mit dort zitierter Literatur). Verf. gibt für gewisse Fälle eine obere Grenze für die Anzahl der Lösungen von (1). Im zweiten Teil werden die gefundenen Resultate dazu benutzt, numerische Lösungen von (1) im Falle  $0 < k f^2 \leq 100$  zu bestimmen. Einige Gleichungen mit  $0 < -k f^2 \leq 100$  werden auch behandelt. In den meisten Fällen, aber nicht in allen, werden sämtliche ganzzahligen Lösungen von (1) gefunden. Nicht alle Folgerungen dieses Abschnittes sind jedoch richtig. Verf. hat sie in einer späteren Arbeit (dies. Zbl. **55**, 36) korrigiert und für  $0 < k f^2 \leq 100$  sämtliche Lösungen gegeben. Im letzten Teil bestimmt Verf. alle ganzzahligen Lösungen von 89 der Gleichungen  $y^2 + 27k = x^3$ ,  $0 < |k| \leq 50$  mit Hilfe früherer Resultate von Billing (dies. Zbl. **18**, 54), Cassels (dies. Zbl. **37**, 27; **43**, 43) und Fueter [Commentarii math. Helvet. **2**, 69—89 (1930)]. Zum Schluß gibt er Tafeln von Lösungen und Fundamental

einheiten, die in der oben genannten Arbeit des Verf. und in Math. Tables Aids Comput. 7, 86 (1953) ergänzt werden. In einer späteren Arbeit (dies. Zbl. 71, 36) untersucht Verf. Gleichungen der Form  $y^2 - f^2 = x^3$ .  
B. Stoll.

**Moessner, Alfred:** Einige zahlentheoretische Untersuchungen und diophantische Probleme. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 143—154 (1949).

Verschiedene Bemerkungen über Systeme ganzer rationaler Zahlen, für die mehrere Potenzsummen übereinstimmen, wie z. B.: (1) Ist  $a = x^2 + xy + y^2$ ,  $a_1 = a$ ,  $a_2 = 2a$ ,  $a_3 = 3a$ ,  $b_1 = x^2 + y^2$ ,  $b_2 = 2x^2 + 4xy + 3y^2$ ,  $b_3 = 3x^2 + 2xy + y^2$ ,  $c_1 = 4a - b_3$ ,  $c_2 = 4a - b_2$ ,  $c_3 = 4a - b_1$ , so gilt  $a_1, a_2, a_3 \equiv b_1, b_2, b_3 \equiv c_1, c_2, c_3$  und  $a_1, a_2, a_3, a_3^5, b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3$  (Übereinstimmen der ersten 2 bzw. der ersten 5 Potenzsummen). (2) Angabe einer Lösung mit 3 freien Parametern für zwei Systeme  $a_1, a_2, a_3$  und  $b_1, b_2, b_3$ , bei denen die Summen aus den Quadraten und aus den Kuben übereinstimmen. (3) Ableitung einer Lösung mit 2 freien Parametern für  $a_1, a_2, \dots, a_7 \equiv b_1, b_2, \dots, b_7$  für  $n = 1, 2, 4, 6, 8$  aus zwei Tripeln  $c_1, c_2, c_3$  und  $d_1, d_2, d_3$  deren 2. und 4. Potenzsummen übereinstimmen. (4) Angabe einer Lösung mit 2 freien Parametern für  $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = A^2$ ,  $a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3 = c_1 c_2 c_3 = B^2$ , die Verf. zusammen mit J. Mahrenholz gefunden hat.  
W. Schulz.

**Gloden, A.:** Note d'analyse diophantienne. Sur l'équation biquadratique  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4$ . Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 54—57 (1949).

Verf. gibt Lösungen der Titelgleichung, insbesondere für den Fall  $x_2 = x_1 = y_2 - y_1$  (bei passenden Indizes und Vorzeichen), mehrere 2-parametrische Lösungsscharen 2. Grades, sowie eine solche 9. Grades im Falle  $x_3 = 0$ :  $x_1 = 128 p^9 + p q^8$ ,  $x_2 = 64 p^8 q - 12 p^4 q^5 - q^9$ ;  $y_1 = 3 p q^8$ ,  $y_2 = 128 p^9 - 2 p q^8$ ,  $y_3 = 64 p^8 q + 12 p^4 q^5 - q^9$ . (Hier ist  $x_1 + 0 = y_1 + y_2$ ).  
A. Aigner.

● **Meister, Fr.:** Magische Quadrate. Zürich: Verlag von Ernst Wurzel 1952. 71 S.

**Iseki, Kaneshiroo:** A proof of a transformation formula in the theory of partitions. J. math. Soc. Japan 4, 14—26 (1952).

Bekanntlich bedeuten nach Euler in  $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n$  die Koeffizienten  $p(n)$  die Anzahl der Partitionen von  $n$ . Auf Rademacher (s. dies. Zbl. 17, 55) geht eine Darstellung für  $p(n)$  durch eine unendliche Reihe zurück. Ein wesentliches Hilfsmittel für den Beweis der Rademacherschen Partitionenformel ist die für  $f(x)$  gültige Funktionalgleichung

$$f(e^{2\pi i h/k - 2\pi z/k}) = \omega_{h,k} \sqrt{z} e^{\pi/12 k z - \pi z/12 k} \cdot f(e^{2\pi i H/k - 2\pi/k z}),$$

worin  $h, H, k$  positiv ganz,  $(h, k) = 1$ ,  $h H \equiv -1 (k)$  und  $\omega_{h,k}$  gewisse 24-te Einheitswurzeln sind:  $\omega_{h,k} = e^{i\pi s(h,k)}$ ,  $s(h, k)$  Dedekindsumme. Ausgehend von einer bekannten Transformationsformel für elliptische Thetafunktionen gibt Verf. einen neuen Beweis obiger Funktionalgleichung. Am Schluß wird noch ein Beweis für das bekannte Reziprozitätsgesetz für Dedekindsummen gegeben sowie für  $\omega_{h,k}$  die Formel

$$\omega_{h,k} = \exp \left( \frac{i\pi}{4k} \sum_{m=1}^k \operatorname{ctg} \frac{\pi h m}{k} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi m}{k} \right) \text{ abgeleitet.} \quad H. Ostmann.$$

**Selberg, Atle:** The general sieve-method and its place in prime number theory. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 286—292 (1952).

Verf. gibt erneut einen Überblick über die Siebmethode. E. Hlawka.

● **Eichler, Martin:** Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 63.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1952. XII, 220 S. DM 24,60.

Seit dem Erscheinen des Werkes von Bachmann ist dies das erste Buch in deutscher Sprache, in dem die seither gemachten Fortschritte auf dem Gebiete der quadratischen Formen gebührend berücksichtigt werden. — Eine Klasse quadratischer Formen über einem Koeffi-



zientenbereich  $A$  ist praktisch dasselbe wie ein  $A$ -Modul  $R$  mit innerem Produkt (dieses Referat ist natürlich cum grano salis geschrieben). In Kap. I ist  $A$  ein Körper  $k$ .  $R$  heißt dann (metrischer) Raum, seine Automorphismengruppe  $\mathfrak{O}$  orthogonale Gruppe. Es wird die Struktur von  $R$  und  $\mathfrak{O}$  (und ihrer Teilsysteme) behandelt, insbesondere mit Hilfe der Cliffordschen Algebra  $C$ . Neu ist die vom Verf. entdeckte Spinornorm  $t: \mathfrak{O}^+ \rightarrow k^x/k^{x^2}$ . Die Räume der Dimensionen  $\leq 6$  werden besonders ausführlich untersucht. — Weiterhin sei  $\mathfrak{o}$  der Ring ganzer Zahlen des Zahlkörpers  $k$ ,  $\mathfrak{o}_p$  der Ring ganzer Zahlen einer  $p$ -adischen Erweiterung  $k_p$  (analog für einen Funktionenkörper  $k$  einer Variablen über einem Galoisfeld). Im Falle  $A = \mathfrak{o}$ ,  $\mathfrak{o}_p$  heißt der  $A$ -Modul Gitter, die Automorphismengruppe wird automorphe Einheitengruppe genannt. In Kap. II wird der Fall  $A = k_p$  bzw.  $\mathfrak{o}_p$  behandelt, in den restlichen Kapiteln ist  $A = k$  bzw.  $\mathfrak{o}$ , in fünf Paragraphen ist  $k$  der rationale Körper. — Hauptziel des Buches ist, Gesetzmäßigkeiten für die verschiedenen Gitter aufzustellen, möglichst in Analogie zur Arithmetik der Zahlkörper bzw. der Algebrentheorie. Hierbei wird die Arithmetik der Zahlkörper als bekannt vorausgesetzt, die Algebrentheorie jedoch vermieden (zugunsten einer Autarkie der Theorie quadratischer Formen, aber vielleicht auf Kosten der Einfachheit). Gebracht wird: die Theorie von Minkowski-Hasse ( $A = k, k_p$ ), Modulformen,  $\theta$ -Reihen, Gaußsche Summen, Reziprozitätsformeln, und in Auszügen: Die Theorie von Hecke (Operatoren  $T_p$ , Euler-Produkte), die Theorie von Minkowski und Siegel (Maßformeln), Für eine von Hecke analytisch entdeckte Relation für gewisse Anzahlmatrizen wird hier ein vom Verf. gefundener Beweis gegeben. (Auch der vom Verf. stammende Begriff des Spinorgeschlechts ist erwähnt.) Leider sind die Kap. VI und VII des Manuskripts nicht mitgedruckt worden. Ernst Witt.

**Eichler, Martin:** Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter. Math. Z. 55, 216—252 (1952).

In seinem Buch (Referat vorstehend) hat Verf. den Satz 15. 1. bewiesen, daß für  $n > 2$  die Spinorgeschlechter isotroper Räume über einem Zahlkörper  $k$  Ähnlichkeitsklassen sind, und er hat vermutet, daß dasselbe auch für anisotrope Räume gilt, falls die automorphe Einheitengruppe unendliche Ordnung hat. Diese Vermutung wird hier in vielen Fällen bewiesen, z. B. im Falle  $k = k_0$  (rationaler Körper), in dem ein enger Zusammenhang mit dem Satz von Meyer besteht über die Äquivalenz indefiniter quadratischer Formen eines Geschlechts. Für  $n = 3, 4$  wird Satz 15. 1. und für  $k = k_0$  (und leichten Einschränkungen) der Satz von Meyer auf verallgemeinerte Ordnungen übertragen. Verf. vermutet, daß sich die Einschränkungen bei anderer Beweisführung vermeiden lassen. Weiter wird arithmetisch für  $k = k_0$  der Satz bewiesen: Zwei verwandte  $n$ -dimensionalen Gitter enthalten gleich viele Klassen assoziierter Teilgitter fester Struktur mit indefinitem Komplement der Dimension  $> 2$ , wobei alle Darstellungsmaße übereinstimmen. Dieser Satz steht in Beziehung zu einem analytischen Ergebnis von Siegel [Ann. of Math. 45, 577—622 (1944); dies. Zbl. 43, 274], daß Zetafunktionen verwandter indefiniter Formen übereinstimmen. Ernst Witt.

**Varnavides, P.:** The Minkowski constant of the form  $x^2 - 11y^2$ . Bull. Soc. math. Grèce 26, 14—22, griechische Zusammenfassg. 22—23 (1952).

Verf. beweist, daß die Minkowskische Schranke, d. h. die untere Grenze aller  $C^2$ , für die zu beliebigen reellen Zahlen  $x_0, y_0$  ganze rationale Zahlen  $x, y$  existieren, so daß  $|f(x + x_0; y + y_0)| \leq C^2$  ist, für die quadratische Form  $f(x, y) = x^2 - 11y^2$  den Wert  $\frac{19}{2}$  besitzt. Dabei gibt es unendlich viele Zahlenpaare  $x, y$ , für welche die untere Schranke wirklich angenommen wird. Der Beweis ergibt sich durch leichte Modifikationen einer analogen Untersuchung des Verf. für  $f(x, y) = x^2 - 7y^2$ .

J. Heinhold.

**Gericke, H.:** Äquivalenz des Satzes von Hajós mit einer Vermutung von Minkowski. Arch. der Math. 3, 34—37 (1952).

Minkowski vermutete, daß das Ungleichungssystem  $|L_i| < 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $L_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ ;  $a_{ik}$  reell;  $a_{ik} = \pm 1$ ) nur dann kein ganzzahliges nichttriviales Lösungssystem

$(x_1, \dots, x_n)$  besitzt, wenn nach geeigneter Substitution  $y_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $c_{ik}$  ganz;

$|c_{ik}| = \pm 1$ )  $L_i = y_i + \sum_{k=i+1}^n b_{ik} y_k$  gesetzt werden kann. Ref. hat diese Vermutung mit Hilfe

folgenden Satzes bewiesen (dies. Zbl. 25, 254): Sind  $A_1, \dots, A_n$  Elemente einer endlichen abelschen (additiven) Gruppe,  $p_1, \dots, p_n$  ganze Zahlen, und ist ein jedes Element der Gruppe auf eine

und nur eine Weise in Form  $\sum_{i=1}^n d_i A_i$  ( $0 \leq d_i < p_i$ ) darstellbar, so gilt für wenigstens ein  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die Relation  $p_i A_i = 0$ . Dieser Beweis beruhte auf geometrischer Umformulierung der Vermutung. — Verf. setzt als Ziel, den Umweg über Geometrie ausschaltend, einer-

seits aus der Vermutung direkt auf den angeführten Satz zu schließen, andererseits von diesem Satz ausgehend die Vermutung im Falle rationaler  $a_{ik}$  zu bestätigen. Sein Gedankengang enthält aber eine wesentliche Lücke, da vom Relationensystem  $p_k A_k = \sum_{i=1}^n q_{ik} A_i$  ( $k = 1, \dots, n$ ;  $q_{kk} = 0$ ;  $0 \leq q_{ik} < p_i$ ; Elemente  $A_k$  und Zahlen  $p_k$  erfüllen obige Voraussetzungen) ohne Beweis angenommen wird, daß es die Gruppe definiert. Diese Lücke stört alles Folgende. — Ref. bemerkt, daß der Gedankengang sich retten läßt, indem man anstatt der eben erwähnten Relationen beliebige, die abelsche Gruppe definierende  $n$  Relationen in Betracht zieht. Diese Bemerkung bezieht sich aber nicht auf das, was in der Arbeit über die Spezialfälle  $n = 2, 3$  gesagt wird.

G. Hajós.

**Lochs, Gustav:** Über die Anzahl der Gitterpunkte in einem Tetraeder. Monatsh. Math. 56, 233—239 (1952).

Let  $n$  be the number of non-negative integral solutions  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  of the inequalities  $0 \leq x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_k \alpha_k \leq x$ , where  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  and  $x$  are given positive numbers. The author shows

$$nA = x^k + \frac{1}{2} k x^{k-1} (\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + A\Delta + O(x^{k-2})$$

as  $x \rightarrow +\infty$ , where  $A = k! x_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$  and  $\Delta$  has a certain arithmetical definition. Bounds are given for  $\Delta$  in terms of the continued fraction expansion of the ratio  $\alpha_2/\alpha_1$ ; and in general these lead to better estimates for  $n$  than those obtained previously by the author (this Zbl. 39, 39) and D. H. Lehmer (this Zbl. 24, 149). C. A. Rogers.

**Bochner, S.:** Remarks on Gaussian sums and tauberian theorems. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 97—104 (1952).

The author points out that Kronecker's derivation of the reciprocity formula for certain Gaussian sums from the modular relation

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2/x} = x^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2/x} \right\}$$

is fundamentally an Abelian-Tauberian argument. In the present paper this argument is reproduced in a general set-up, although the author remarks that he has no specific instances to offer other than those well known. A. L. Whiteman (M. R. 13, 823).

**Kesava Menon, P.:** On Gauss's sums. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 31—36 (1952).

For integral values of  $a, x, M$  the function  $F(a, x, M)$  is defined by the relation

$$F(a, x, M) = \sum_{m \pmod{M}} \exp \frac{2\pi i}{M} (a m^2 + x m)$$

where  $\sum_{m \pmod{M}}$  indicates summation over a complete set of residues modulo  $M$ . Two properties of this function are established. The simpler is that if  $N = aA^2 + bB^2$  is prime to  $M$ , then

$$F(a, x, M) F(b, y, M) = F(N, Ax + By, M) F(Nab, aAy - bBx, M).$$

W. H. Gage (M. R. 13, 913).

**Čudakov, N. G. und A. K. Pavljučuk:** Über die Charaktersummen der Charaktere von Zahlengruppen mit endlicher Basis. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 366—381 (1951) [Russisch].

The case for rationals has been treated before by Čudakov and Linnik (this Zbl. 39, 37). The present paper studies the multiplicative group  $\mathfrak{G}$  of positive algebraic numbers with a finite basis  $\omega_1, \dots, \omega_p$ , and  $\omega_p > 1$ . Since  $\log \omega_1, \dots, \log \omega_p$  are linear independent, the numbers  $\lambda = x_1 \log \omega_1 + \dots + x_p \log \omega_p$  are all different, as  $x_1, \dots, x_p$  run over all non-negative rational integers. Let  $\chi$  be a character of the group  $\mathfrak{G}$ . Let  $H(x) = \sum_{\lambda \leq x} \chi(e^\lambda)$ . Suppose that

$$\sigma_0 = \max_{1 \leq k \leq p} \log |\chi(\omega_k)| / \log \omega_k$$

and  $q$  is the number of  $k$ 's such that  $\sigma_0 = |\log \chi(\omega_k)| / \log \omega_k$ . Then we have the following conclusions: (1)  $H(x)$  is bounded, if  $\sigma_0 < 0$  or if  $\sigma_0 = 0$ ,  $q = 1$  and



$\chi(\omega_k) \neq 1$  for all  $k$ , (2)  $H(x) = \Omega(x)$  if  $\sigma_0 = 0$  and  $\chi(\omega_k) = 1$  for some  $k$ , (3)  $H(x) = \Omega((\log \log \log x)^{1/2})$  for  $\sigma_0 = 0$  and  $q \geq 2$  and (4)  $H(x) = \Omega(x^{-1} e^{\sigma_0 x})$  for  $\sigma_0 > 0$ . (2), (3), (4) are proved by delicate analytic method in the theory of numbers, which are due to Vinogradov, Gel'fond and Linnik. *L. K. Hua.*

**Kubiljus, I. P. und Ju. V. Linnik:** Über die Zerlegung des Produktes von drei Zahlen in eine Summe von zwei Quadraten. *Trudy mat. Inst. Steklov.* Nr. 38, 170—172 (1951) [Russisch].

Seien  $\{u\}, \{v\}$  Systeme quadratfreier, als Summe von zwei Quadraten darstellbarer, natürlicher Zahlen  $\leq x$ , von denen jedes mehr als  $x/\log^3 x$  Zahlen enthält.  $U$  bzw.  $V$  sei die Gesamtanzahl der Darstellungen der Zahlen aus  $\{u\}$  bzw.  $\{v\}$  als Summe von zwei Quadraten;  $p$  durchlaufe die Primzahlen  $p \leq y = \exp(\log^{4/5} x)$  mit  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .  $Q(x, y, \varphi_1, \varphi_2)$  sei die Anzahl der Lösungen von  $uvp = k^2 + l^2$  mit  $\varphi_1 \leq \arctg(l/k) \leq \varphi_2$ , wobei  $0 \leq \varphi_2 - \varphi_1 \leq \pi$ . Dann gilt für  $x \rightarrow \infty$

$$Q(x, y, \varphi_1, \varphi_2) = 8y\pi^{-1}(\log y)^{-1}UV\{(\varphi_2 - \varphi_1)(1 + o(1)) + O(1/x)\}.$$

Speziell folgt die Existenz von Zerlegungen  $w = uv p = k^2 + l^2$ ,  $l = O(\exp \log^{4/5} w)$  und, wenn man für  $\{u\}$  und  $\{v\}$  das System der Primzahlen  $p \leq x$ ,  $p \equiv 1 \pmod{4}$  nimmt, folgt ein Resultat über Produkte  $p_1 p_2 p_3$ , welches, wäre es für eine einzige Primzahl bewiesen, die Riemannsche Vermutung für die Hecke'schen  $L$ -Reihen ergäbe. — Der Beweis geht von der Summe  $\Phi = \sum_{(w)} f\{\arctg(l_w/k_w)\}$  aus, wobei  $f\{\varphi\}$  die

durch „Abrundung“ stetig gemachte Funktion ist, welche  $= 1$  ist für  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  und  $= 0$  sonst;  $l_w, k_w$  durchläuft alle Darstellungen von  $w = k_w^2 + l_w^2$ , wobei  $w = uv p$  eventuell gewisse Werte mehrfach annehmen kann ( $\Phi$  ist im wesentlichen das Doppelte der gesuchten Anzahl).  $f\{\varphi\}$  wird (in üblicher Weise) durch eine trigonometrische Summe  $\sum_{|m| \leq M} a_m e^{4mi\varphi}$  angenähert ( $M = 5x \log x$ ). Wenn

$u = k_u^2 + l_u^2$ ,  $v = k_v^2 + l_v^2$ , so  $uv = (k_u k_v - l_u l_v)^2 + (l_u k_v + l_v k_u)^2 = k_{uv}^2 + l_{uv}^2$ , also  $\arctg(l_u/k_u) + \arctg(l_v/k_v) = \arctg(l_{uv}/k_{uv})$ . So entspricht dem Produkt  $w = uv p$  die Summe  $\arctg(l_u/k_u) + \arctg(l_v/k_v) + \arctg(l_p/k_p) = \arctg(l_w/k_w)$ . So ergibt sich für  $\Phi$  eine Näherung durch  $\sum_{|m| \leq M} a_m S_u(m) S_v(m) S_p(m)$ , wobei

z. B.

$$S_u(m) = \sum_{(u)} \exp\left(4mi \arctg \frac{l_u}{k_u}\right).$$

Das Hauptglied ist  $a_0 S_u(0) S_v(0) S_p(0) - a_0 UV S_p(0)$ . Der Fehler wird durch

$$\max_{0 < |m| \leq M} |a_m S_p(m)| \cdot \left\{ \sum_{0 < |m| \leq M} |S_u(m)|^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{0 < |m| \leq M} |S_v(m)|^2 \right\}^{1/2}$$

abgeschätzt, und es werden die entstehenden trigonometrischen Summen nach bekannten Methoden behandelt:  $S_p(m) \ll y \exp(-\log^{0.03} x)$ ,  $\sum |S_u|^2 \ll U(U \log x + M) \ll U^2 \log^4 x$ ,  $\sum |S_v|^2 \ll V^2 \log^4 x$  (die erste Abschätzung — mittels der Methode von Vinogradov — wird nicht im einzelnen durchgeführt). *K. Prachar.*

**Linnik, Ju. V.:** Primzahlen und Potenzen von Zwei. *Trudy mat. Inst. Steklov.* Nr. 38, 152—169 (1951) [Russisch].

Verf. beweist unter Annahme der erweiterten Riemannschen Vermutung für die Dirichlet'schen  $L$ -Reihen, daß jede hinreichend große gerade Zahl  $N$  in der Form  $N = p_1 + p_2 + 2^{x_1} + \dots + 2^{x_k}$ ,  $p_i$  Primzahlen,  $x_j$  natürliche Zahlen, mit absolut beschränktem  $k$  dargestellt werden kann und gibt eine asymptotische Formel für die Lösungsanzahl [Druckfehler: In der Formulierung des Theorems sind bei der Abschätzung des Fehlergliedes  $q(N)$  die Exponenten  $k-1$  und  $k-2$  zu vertauschen]. Verf. hat inzwischen dieses tiefliegende Resultat sogar ohne Benutzung einer unentschiedenen Hypothese bewiesen (dies. Zbl. 51, 34). *H.-E. Richert.*

**\*Descombes, Roger et Georges Poitou:** Sur certains problèmes d'approximation. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 581—583 (1952).

**\*Poitou, Georges et Roger Descombes:** Sur certains problèmes d'approximation. *II. C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 1522—1524 (1952).

## Analysis.

● **Sominskij, I. S.:** Die Methode der mathematischen Induktion. (Populäre Vorlesungen über Mathematik.) 2. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 48 S. R. 0,75 [Russisch].

● **Sominski (Sominskij), I. S.:** Die Methode der vollständigen Induktion. (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. 3.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 55 S. DM 2,—.

Dieses für Oberschüler, aber auch Studenten und mathematisch interessierte Laien bestimmte Büchlein ist durch seine vielen Aufgaben (mit Lösungen) reizvoll. Die Methode der vollständigen Induktion wird gründlich eingeübt, und es wird immer wieder auf mögliche Fehlschlüsse hingewiesen. F. Dueball.

● **Ruwisch, Erich:** Grundlehren der Elementar-Mathematik. (Fachbücher für Ingenieure.) Essen: Verlag W. Girardet 1952. 260 S., 187 Zeichnungen. Halbleinen DM. 13,20.

● **Mercier, A.:** *Traité de mathématique. D'après les programmes des Ecoles Nationales d'ingenieurs Arts et Métiers. Tome II.* Préface de J. Fieux. (Bibliothèque de l'enseignement technique.) Paris: Dunod 1952. XI, 700 p. avec 264 figures. Broché 1960 fr.

● **Asmus, E.:** Einführung in die höhere Mathematik und ihre Anwendungen. 2. verbesserte Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1952. 178 Abb., 400 S. geb. DM 22.—.

● **Malmquist, Johannes, Valdemar Stenström und Sture Danielson:** Mathematische Analysis. I: Differential- und Integralkalkül. II: Analytische Funktionen und lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet. III: Partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung, Fourierreihen, Integralgleichungen. Stockholm: Natur och Kultur 1951; 1952; 1953. 714 S., 70 kr.; 451 S., 72 kr.; 600 S., 74 kr. [Schwedisch].

Das vor über 10 Jahren vollendete in finnischer Sprache veröffentlichte Lehrbuch von E. Lindelöf und die vorliegende Arbeit dürften die einzigen in nordischen Sprachen geschriebenen Bücher vom Typus „Cours d'analyse“ der vorliegenden Größenordnung sein. In dieser Beziehung füllt das Buch erfreulicherweise eine längst empfundene Lücke aus. Die Redaktion ist freilich in erster Linie der Anwendung in technischen Hochschulen angepaßt, und zwar in bezug auf die Darstellungsweise sowohl wie auf den Inhalt (und schon dadurch ist das Buch dem Lindelöfschen ziemlich wesensfremd). Indessen scheinen die Begründungen im allgemeinen streng genug zu sein, um dem Buch auch gute Anwendungsmöglichkeiten in der rein mathematischen Schulung zu erteilen. Die Darstellung ist anschaulich, besonders in denjenigen Abschnitten, die dem Hauptlehrgang der technischen Hochschulen entsprechen, während weitergehende in Kleinschrift eingefügte Zusatzabschnitte in kürzerer Darstellungsweise Vertiefungen und Ausblicke in verschiedene Richtungen geben. In bezug auf die Auswahl des Stoffes und auf dessen Anordnung können sich natürlich verschiedene Ansichten geltend machen. So kann man sich fragen, ob es pädagogisch richtig ist, den fundamentalen und einfachen Begriff des unbestimmten Integrals viel später als die ganze Theorie der impliziten Funktionen darzustellen, oder eine ziemlich breite Funktionentheorie vorzuführen, ohne den Begriff „Riemannsche Fläche“ zu erwähnen. Der Zugang zu den Laplacetransformationen scheint undurchsichtig und führt gar nicht zu der gewöhnlichen einfachen Methodik in bezug auf lineare Differentialgleichungen. Übrigens machen die Verff. bisweilen Abweichungen von üblicher Bezeichnungsweise [z. B.  $L$ -Transformation als  $\int e^{tu} f(t) dt$  statt  $\int e^{-tu} f(t) dt$ , Norm als  $(f, f)$  statt  $(f, f)^{1/2}$ ]. Zum Verständnis tragen zahlreiche Figuren, physikalische Anwendungen und andere Beispiele (aber keine Übungsaufgaben) bei. Hinweise auf deutliche Figuren ersetzen oft weitläufige Erklärungen. Leider sind die Druck-



fehler sehr zahlreich und die langen Verzeichnisse über diese keineswegs vollständig. In bezug auf den Umfang des Inhalts sei nur auf die Untertitel der Bände hingewiesen. Durch ein genügendes Sachregister läßt sich das empfehlenswerte Lehrbuch auch als Nachschlagwerk ausnutzen.

G. af Hällström.

Stoilow, S.: Sur quelques questions concernant les fondaments de l'analyse classiques. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Ştii. Natur. 1, Nr. 1, 20—24, russ. u. französ. Zusammenfassg. 24 (1952) [Rumänisch].

L'A. se propose de montrer que l'on peut définir correctement, en analyse, le nombre réel, à partir des nombres décimaux „exacts“ (à un nombre fini de chiffres), qu'il appelle „nombres-répère“. Il démontre, par le moyen indiqué, le théorème fondamental de Cauchy sur la convergence des suites, en construisant, une à une, les décimales successives du nombre que l'on obtient comme limite. A. Froda.

Downing, H. H. and S. J. Jasper: On homogeneous functions. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 58—62 (1949).

Für stetige homogene Funktionen  $f(x, y)$  der Ordnung  $n$  mit stetigen Ableitungen gelten einfache Sätze: Satz 1: Die  $m$ -te Ableitung von  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  nach  $t$  lautet symbolisch

$$(x f_{tx} + y f_{ty})^m = \sum_{\nu=0}^m x^{m-\nu} y^{\nu} \binom{m}{\nu} f_{(tx)^{m-\nu} (ty)^{\nu}} = m! \binom{n}{m} t^{n-m} f(x, y)$$

( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). — Verff. formulieren das nebst Umkehrung nur für  $m = n + 1 > 1$ .

Satz 2: Es ist  $f_{x^{n+1}}/y^{n+1} = -f_{x^n y}/y^n x = f_{x^{n-1} y^2}/y^{n-1} x^2 = -\dots$  (nebst Umkehrung). Satz 4: Gilt  $-x/y = f_{x^n y}/f_{x^{n+1}} = f_{x^{n-1} y^2}/f_{x^n y} = \dots = f_{y^{n+1}}/f_{xy^n}$  für alle  $(x, y)$  in einem Gebiet, so ist  $f$  dort homogen in  $x$  und  $y$  von der Ordnung  $n$ .

I. Pausche.

## Mengenlehre:

Markwald, Werner: Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen. Diss. math.-naturw. Fakultät Münster 2, 10—12 (1952).

Brodskij, M. L.: Über die arithmetischen Summen von Mengen, die in einer gegebenen Menge enthalten sind. Ukrain. mat. Žurn. 4, 195—203 (1952) [Russisch].

The arithmetic sum  $M + N$  of two sets  $M, N$  of real numbers (or elements of a Banach space) is the set  $[x + y: x \in M \text{ and } y \in N]$ . There exist perfect sets which contain no set  $M + N$  where  $\overline{M} > 1$  and  $\overline{N} > 1$ . More general, if  $f_m(x_1, x_2, \dots, x_{n_m})$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) are continuous real functions defined for  $a \leq x_i \leq b$ , which do not vanish on a segment parallel to a coordinate axis, then there exists a perfect set  $P \subset [a, b]$  such that  $f_m(x_1, x_2, \dots, x_{n_m}) \neq 0$  for every  $m$  and for every sequence  $x_1, x_2, \dots, x_{n_m}$  of different points of  $P$ . For every measurable set  $M$  and  $\varepsilon > 0$  there exists a perfect set  $P$  such that  $|M + P| \leq |M| + \varepsilon$ ; if  $|M| = 0$ , then  $|M + P| = 0$ . If  $|M| > 0$ , then  $M$  contains a subset  $A + P$  where  $P$  is perfect and  $|A| \geq |M| - \varepsilon$ . If  $|[a, b] - A| \doteq 0$ ,  $0 < \varepsilon < b - a$ , then  $A$  contains a subset  $B + P$ , where  $P$  is a perfect set with the diameter  $\varepsilon$ , and  $|[a, b - \varepsilon] - B| = 0$ . If  $E$  is a separable Banach space and  $A \subset E$  is a set of the first category, then there exists a perfect set  $P \subset E$  such that  $A + P$  is of the first category. Each Borel set  $B \subset E$  of the second category contains a subset  $A + P$  where  $P$  is perfect and  $B$  is a Borel set of the second category.

R. Sikorski.

Riesz, Frigyes: Les ensembles de mesure nulle et leur rôle dans l'analyse. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 205—214 [Ungarisch], 215—224 [Französ.] und russische Zusammenfassg. 214 (1952).

È noto che la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue ha aperto la strada a ricerche, del più grande interesse, sulla struttura degli insiemi di misura nulla, ricerche oggi ancora lontane dalla loro conclusione. L'A. espone, in forma riassuntiva e con singolare efficacia sintetica, numerose questioni nelle quali la considerazione degli insiemi di misura nulla riveste particolare importanza: questioni riguardanti sia la teoria generale dell'integrazione, sia le applicazioni alle serie trigonometriche, alle funzioni di variabile complessa, al calcolo delle probabilità, ecc. L'interesse di quest'articolo è accresciuto da alcune acute osservazioni critiche: segnaliamo particolarmente quelle riguardanti un teorema di E. Borel secondo cui, fatta eccezione d'un insieme di numeri reali avente misura nulla, ognuno di tali numeri è rappresentato da uno sviluppo

decimale infinito nel quale ogni cifra ammette la frequenza media  $1/10$ , e quelle riguardanti un teorema di H. Steinhaus secondo cui, prefissata una qualunque successione  $\{a_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) di numeri reali, la probabilità che converga la serie  $\sum \pm a_n$  in cui i segni  $\pm$  sono presi a caso (per ciascun  $n$ ) e indipendentemente l'uno dall'altro, è 1 se  $\sum a_n^2 < \infty$ , è 0 se  $\sum a_n^2 = \infty$ .  
T. Viola.

Ribeiro de Albuquerque, J.: Un théorème sur les ensembles criblés. *Portugaliae Math.* **11**, 95—103 (1952).

L'A. complète la démonstration de la proposition suivante (de sa thèse), concernant les cribles rationnels, définis au sens de Sierpinski [*Fundamenta Math.* **11**, 16 (1928)]: „Soient  $C$  un crible rationnel extrait d'une famille  $F$  et  $E$  criblé par  $C$ . Si  $E^*$ , disjoint de  $E$ , est aussi criblé par un crible rationnel  $C^*$ , extrait de  $F$ , le crible donné  $C$  est borné sur  $E^{**}$ .  
A. Froda.

Ciorănescu, Nicolas: Le procédé de la dichotomie et le système dyadique dans la théorie des ensembles linéaires bornés. *Bull. Inst. Politechn. Jassy* **4**, 337—339 (1949).

L'A. fa vedere che la ben nota dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass, basata sul procedimento della dicotomia, permette di scrivere immediatamente l'espressione aritmetica del punto di accumulazione  $\xi$  dell'insieme  $E \in (0, 1)$  che lo stesso procedimento individua. Si ha infatti:  $\xi = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$  dove  $\alpha_k = 0$  se si è scelta nella  $k$ -ma operazione la prima metà dell'intervallo rimasto dopo l'operazione precedente, e  $\alpha_k = 1$  se si è invece scelta la seconda metà. L'A. osserva, fra l'altro, che lo stesso procedimento serve per scrivere le espressioni aritmetiche del massimo e del minimo limite dei punti di  $E$  e così pure quelle degli estremi, superiore e inferiore, di  $E$  sempre nel sistema di numerazione binaria. V'è da aggiungere che le considerazioni svolte possono essere estese agli insiemi  $p$ -dimensionali.

L. Giuliano.

## Differentiation and Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

• Bourbaki, N.: *Éléments de mathématique*. XIII. 1. part.: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre VI: Intégration. Chap. I: Inégalités de convexité. Chap. II: Espaces de Riesz. Chap. III: Mesures sur les espaces localement compacts. Chap. IV: Prolongement d'une mesure espaces  $L^p$ . (Actualités scientifique et industrielles No. 1175). Paris: Hermann & Cie. 1952. 237 p.

Nach zwei vorbereitenden Kapiteln über Ungleichungen und Rieszsche Räume folgen: Radonsche Maße  $\mu$  lokalkompakter Räume  $E$ .  $\int f d\mu$  für Funktionen  $f$  mit kompaktem Träger und Werten aus einem lokalkonvexen separierten Vektorraum  $F$ , äußeres Maß  $\mu^*$ , Begriffe „Nullmenge“, „fast alle“, die „ $p$ -integrierbaren oder  $p$ -summierbaren Räume“  $\mathcal{L}_p^p$ , Theorem von Lebesgue, Meßbarkeit (in der Definition werden allerdings nur Nullmengen gemessen!), Kriterien hierzu und das Theorem von Egoroff. — In kleingedruckten Abschnitten wird die Integration auf Mengen (statt auf lokalkompakten Räumen) behandelt (Daniellsches Integral). Zur Einübung des Lesers 126 Aufgaben. Eine Aufgabe behandelt z. B. die früher so wichtige Spektraltheorie (S. 31), eine andere die Definition der Meßbarkeit nach Carathéodory (S. 200). — Im einzelnen: Kap. I. Hilfssatz über Mittelwertbildungen  $M$  reellwertigen Funktionen  $f$ , hieraus die Ungleichungen von Hölder und Minkowski. Normen  $(M(f^p))^{1/p}$ . — Kap. II. Ein Rieszscher Raum  $\mathcal{K}$  ist ein reeller Vektorraum mit verträglicher Verbandstruktur.  $\mathcal{K}$  heißt vollständiger Rieszscher Raum, wenn seine Ordnung nach Adjunktion von  $\pm \infty$  vollständig ist. In einem solchen lassen sich direkte Summanden  $\mathcal{B}$  (Bande) als [orthogonale] Komplemente bezüglich der Fremdheitsrelation  $\inf |x|, |y| = 0$  charakterisieren, oder mit Hilfe der Begriffe ordnungskonvex und sup. Über einem Rieszschen Raum  $\mathcal{K}$  bilden die Differenzen positiver Linearformen (oder gleichwertig: relativ beschränkter Linearformen) einen Rieszschen Raum  $\mathcal{M}$ . — Zur Beschreibung von Kap. III. folgende Bezeichnungen:  $F$  sei ein lokalkonvexer separierter reeller Vektorraum, in dem die abgeschlossene konvexe Hülle jedes Kompaktums kompakt ist,  $\mathcal{C}_F$  die Menge der stetigen Abbildungen  $f: E \rightarrow F$ ,  $\mathcal{K}_F$  die stetigen  $f$  mit kompaktem Träger [ $K$  heiße hier Träger, falls  $f(E - K) = 0$ ]. Im Falle  $F = \mathbf{R}$  (reelle Zahlen) wird  $f, \mathcal{C}, \mathcal{K}$  an Stelle  $f, \mathcal{C}_F, \mathcal{K}_F$  geschrieben und  $\|f\| = \sup |f|$  gesetzt. — Ein Radonsches Maß  $\mu$  wird nun als reelle Linearform auf  $\mathcal{K}$  erklärt mit der Stetigkeitsbedingung  $|\mu(f)| \leq M_K \|f\|$  für alle Funk-



tionen  $f$  zum Träger  $K$ . Die Menge  $\mathcal{M}$  aller Maße ist  $\mathcal{C}$ -Modul und besteht genau aus den Differenzen positiver Linearformen, ist mithin ein vollständiger Rieszscher Raum.  $\mathcal{M}$  enthält abstrakt den Dualraum von  $\mathcal{K}$  als Banachschem Raum mit der Norm  $\|\mu\| = \sup |\mu(f)|$  ( $\|f\| \leq 1$ ). Zusätzlich der vagen Topologie von  $\mathcal{M}$  (d. h. bei einfacher Konvergenz in  $\mathcal{K}$ ) ist die Menge  $\mathcal{M}_+$  der Maße  $\mu \geq 0$  vollständig. Nach der Methode der Zerlegung der 1 (S. 49) wird bewiesen, daß untereinander verträgliche Maße  $\mu_\alpha$  einer offenen Überdeckung  $E = \bigcup G_\alpha$  eindeutig ein Maß  $\mu$  bestimmen. Für  $\mu$  gibt es eine größte offene Menge  $U$ , auf der  $\mu$  verschwindet. Genau diejenigen Maße, für die  $E - U$  kompakt ist, lassen sich (eindeutig) auf  $\mathcal{C}$  fortsetzen. Jedes Maß läßt sich vage durch Punktmaße approximieren. —  $F'$  sei der topologische Dualraum von  $F$ ,  $F'^*$  der algebraische Dualraum von  $F'$ , der  $F$  kanonisch enthält. Das Integral  $\int f d\mu$  wird nun für  $f \in \mathcal{K}_F$ ,  $\mu \in \mathcal{M}$  als die Linearform  $\mu(z'f)$  in  $z' \in F'$  definiert. Dies Integral ist ein Element von  $F \subset F'^{**}$  und läßt sich charakterisieren durch Linearität in  $f$ ,  $\int a g d\mu = a \int g d\mu$  ( $a$  konstant  $\in \mathcal{K}_F$ ,  $g \in K$ ) und Stetigkeit der Abbildung  $f \rightarrow \int f d\mu$  für die Topologie gleichmäßiger Konvergenz. — In  $E = E_1 \times E_2$  wird das direkte Produkt zweier Maße  $\mu_i$  auf  $E_i$  durch  $\int f_1 f_2 d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int f_1 d\mu_1 \cdot \int f_2 d\mu_2$  festgelegt ( $f_i \in \mathcal{K}_i$ ). Es folgt dann die Integrationsregel von Fubini für  $f \in \mathcal{K}_F$ . Für die Multiplikation der Maße mit stetigen Funktionen gelten die üblichen Regeln. Nun werden Produkte von Maßen für endliche Produkte lokalkompakter bzw. beliebige Produkte oder projektive Limites kompakter Räume definiert. — In Kap. IV wird ein festes positives Maß  $\mu$  eines lokalkompakten Raumes  $E$  zugrunde gelegt und in folgender Weise zum äußeren Maß  $\mu^*$  fortgesetzt:  $\mathcal{K}_+$  bezeichne die positiven Funktionen aus  $\mathcal{K} - \mathcal{K}(E)$ ,  $\mathcal{J}_+$  die unterhalb stetigen Funktionen  $\geq 0$  (incl.  $\infty$ ),  $\mathcal{F}_+$  beliebige Funktionen  $\geq 0$  (incl.  $\infty$ ). Die Fortsetzung  $\mu^*$  von  $\mu$  auf  $\mathcal{J}_+$  wird als  $\sup \mu$  der Unterfunktionen aus  $\mathcal{K}_+$  und die weitere Fortsetzung auf  $\mathcal{F}_+$  durch  $\inf \mu^*$  der Oberfunktionen aus  $\mathcal{J}_+$  erklärt.  $\mu^*$  ist auf  $\mathcal{J}_+$  linear, und auf  $\mathcal{F}_+$  konvex. Für eine abzählbare isotone Folge  $f_n \geq 0$  gilt  $\mu^* \sup f_n = \sup \mu^* f_n$ . Für Teilmengen  $A$  mit der charakteristischen Funktion  $\varphi_A$  wird  $\mu^* A = \mu^* \varphi_A$  gesetzt. Durch  $\mu^*(E - A) = 0$  wird die Rede-weise „fast überall“ eingeführt, und entsprechend eine Einteilung in Funktionenklassen erklärt [mod der hier im folgenden stillschweigend gerechnet wird]. — ( $\mathcal{F}_F$  sei der Raum aller Abbildungen  $f: E \rightarrow F$  in einen reellen Banachraum  $F$  mit der Norm  $\|z\|$ . Der durch  $N_p(f) = (\mu^* |f|^p)^{1/p} < \infty$  bestimmte Teilraum  $(\mathcal{F}_F)^p$  ist bezüglich  $N_p$  als Norm ein lokalkonvexer Banachraum ( $1 \leq p < \infty$ ) in dem  $\mathcal{L}_F^p$  als abgeschlossene Hülle von  $\mathcal{K}_F$  definiert wird.  $\mathcal{L}_F^p$  ist dann in verträglicher Weise zugleich Banachraum und vollständiger Rieszscher Raum.  $g$  sei eine reelle Funktion mit  $\mu^* g^p < \infty$ . Das Theorem von Lebesgue sagt dann aus: Eine Folge  $f_n \in \mathcal{L}_F^p$ , für die fast überall  $f_n(x)$  gegen  $f(x) \in F$  konvergiert und fast überall  $|f_n(x)| \leq g(x)$  gilt, konvergiert in  $\mathcal{L}_F^p$  gegen  $f$ . Hiermit wird gezeigt, daß  $f \in \mathcal{L}_F^p$  mit  $|f|^{p/q-1} \cdot f \in \mathcal{L}_F^p$  gleichwertig ist. —  $\mathcal{K}_F^p$  liegt dicht in  $\mathcal{L}_F^p$  und wird durch  $\int f d\mu$  stetig in  $F$  abgebildet. Die eindeutige stetige Fortsetzung dieser Abbildung auf  $\mathcal{L}_F^1$  wird als Integral  $\int f d\mu$  bezeichnet, und die Elemente aus  $\mathcal{L}_F^1$  werden integrabel genannt. Insbesondere werden Kriterien für reelle integrable Funktionen ( $F = \mathbf{R}$ ) angegeben.  $A \subset E$  heißt integrabel, wenn die charakteristische Funktion  $\varphi_A$  integrabel ist. Bei stetiger linearer Abbildung  $u$  von  $F$  in einen Banachraum  $G$  ist  $u \cdot \mathcal{L}_F^p \subseteq \mathcal{L}_G^p$  und  $u \cdot \int f d\mu = \int (u f) d\mu$ . — Für eine Algebra  $\mathfrak{A}$  charakteristischer Funktionen  $\varphi_A$  ist der „Treppenmodul“  $F \mathfrak{A}$  ein Rieszscher Raum. Wenn alle Kompakta  $K$  in dem „clan“ der  $A$  vorkommen, ist  $F \mathfrak{A}$  dicht in  $\mathcal{K}_F$  bezüglich der Topologie gleichmäßiger Konvergenz. — Eine Abbildung  $f$  (in einen beliebigen topologischen Raum  $F$ ) heiße meßbar, wenn jedes Kompaktum  $K$  bis auf eine Menge vom Maß 0 direkte Vereinigung abzählbarer vieler Kompakta  $K_n$  ist, auf denen  $f$  stetig ist. Die Meßbarkeit hat lokalen Charakter. Meßbarkeit von  $A$  (genauer  $\varphi_A$ ) ist gleichwertig mit: Integrabilität von  $A \cap K$  für jedes Kompaktum  $K$ . Es werden nun die elementaren Eigenschaften meßbarer Funktionen und das Theorem von Egoroff über abzählbare Limesbildung hergeleitet, ferner Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen in jedem Kompaktum. Für metrisierbare Räume  $F$  wird ein Meßbarkeitskriterium ohne Voraussetzung des zweiten Abzählbarkeitsaxioms formuliert (S. 191). Für einen Banachraum  $F$  ist  $f \in \mathcal{L}_F^p$  gleichbedeutend mit: Meßbarkeit von  $f$  und  $N_p(f) < \infty$ . — Schließlich werden bekannte Beziehungen zwischen den  $\mathcal{L}_F^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) aufgestellt mit dem Hölderschen Ungleichung als Grundlage.

Ernst Witt.

**Ionescu Tulcea, C. T.:** Sur l'intégration des fonctions d'ensemble. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Ştii. Natur. 1, Nr. 1, 11–16, russ. u. französ. Zusammenfassung. 16 (1952) [Rumänisch].

L'A. définit une intégrale générale pour les fonctions définies sur une famille d'ensembles en prenant leurs valeurs dans un semigroupe  $G$  muni d'une structure d'espace uniforme. Soit  $X$  un ensemble quelconque,  $T$  une famille de sousensembles de  $X$  et  $f$  une application de  $T$  dans  $G$  telle que  $f(a) \neq 0$  pour  $a \neq \emptyset$ . Soit  $a \in T$ ,  $a \neq \emptyset$  et  $T(a)$  l'ensemble des partitions de  $a$  et

éléments de  $T$ . Si  $P \in T(a)$ , on considère toutes les parties finies de  $P$  et on désigne par  $T_0(a)$  l'ensemble de toutes ces parties quand  $P$  parcourt  $T(a)$ . Soient maintenant  $\mathfrak{T} \subset T_0(a)$  et  $P = (e_j)_{j \in J} \in T(a)$ . On dit que  $P$  est une partition de base pour  $\mathfrak{T}$  s'il existe une partie finie  $J_0 \subset J$ , telle que pour toute partie finie  $I \subset J$ ,  $I \supset J_0$  on ait  $(e_j)_{j \in I} \in \mathfrak{T}$ . On appelle filtre de Phillips,  $F(a)$ , l'ensemble de parties  $\mathfrak{T} \subset T_0(a)$  ayant la propriété suivante: il existe  $P \in T(a)$  telle que toute partition  $P' \in T(a)$ , plus fine que  $P$ , soit une partition de base de  $\mathfrak{T}$ . Pour tout  $D \in T_0(a)$ , soit  $S_a(f, D) = \sum_{e \in D} f(e)$ . La limite de cette somme selon le filtre  $F(a)$ , si elle

existe, est nommée intégrale de  $f$  dans  $a$ , et est notée  $\int_a df$ . L'A. énonce diverses propriétés de cette intégrale, parmi lesquelles l'additivité complète et l'équivalence différentielle.

G. Marinescu.

**Dubrovskij, V. M.:** Über die beste Majorante einer Familie von vollständig additiven Mengenfunktionen. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski 163, Mat. 6, 89—98 (1952) [Russisch].

The best major function of a collection  $\{\nu_x\}_{x \in A}$  of signed measures defined on a  $\sigma$ -field of sets  $\mathfrak{M}$  is a positive additive set function  $\mu$  such that: (1)  $|\nu_x(M)| \leq \mu(M)$  for every  $x \in A$  and every  $M \in \mathfrak{M}$ ; (2) if  $\mu_0$  is any additive set function satisfying (1), then  $\mu \leq \mu_0$ . The main theorem of the paper is as follows: Let  $A$  and  $B$  be measurable subsets of the  $n$ -dimensional Euclidean space ( $0 < |A| \cdot |B| < \infty$ ), and let  $f(x, y)$  be a  $(x, y)$ -measurable function defined for  $x \in A$  and  $y \in B$ , such that, for every  $x \in A$ ,  $f(x, y)$  is an integrable function of  $y$ . Let  $\kappa(M) = \int_M \sup_{x \in A} |f(x, y)| dy$  for  $M \subset B$  and let  $\nu_x(M) = \int_M f(x, y) dy$  ( $M \subset B$ ). The best major function  $\mu$  of the

collection of signed measures  $\{\nu_x\}_{x \in A}$  satisfies the inequality  $\mu \geq \kappa$ . The equality  $\mu = \kappa$  holds if the following condition is satisfied: for every  $x_0 \in A$  there is a set  $B_{x_0} \subset B$  of measure 0 such that for every  $y \in B - B_{x_0}$  the function  $f(x, y)$  of one variable  $x$  is continuous at  $x_0$ . In the general case, there is a set  $A_0 \subset A$  of measure 0, such that  $\kappa$  is the best major function of the collection  $\{\nu_x\}_{x \in A - A_0}$ . R. Sikorski.

\*Goffman, Casper: A generalization of the Riemann integral. Proc. Amer. math. Soc. 3, 543—547 (1952).

**García Pradillo, Julio:** Produktintegrale. Gac. mat., Madrid 4, 74—80 (1952) [Spanisch].

Es handelt sich um eine Übertragung der zum Riemann- bzw. Riemann-Stieltjes-Integral führenden Grenzprozesse von Summen auf Produkte. Doch kommt dabei, wie Verf. selbst konstatiert, nichts wesentlich Neues heraus; z. B. gilt  $P_a^b f(x)^{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \lim \prod_{i=1}^n f(\xi_i)^{dx_i} = \exp \int_a^b \log f(x) dx$  (auch im Sinne gleichzeitiger Existenz).

H. Pietsch.

**Ascoli, Guido:** Sopra un'estensione di una formula asintotica di Laplace agli integrali multipli. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 209—227 (1952).

**Ascoli, Guido:** Sopra un'estensione della formula asintotica di Laplace agli integrali multipli. Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 5—7 (1953).

Verf. gibt zunächst eine Übersicht über verschiedene Beweise und Verallgemeinerungen der bekannten Laplaceschen asymptotischen Formel für einfache Integrale der Gestalt

$$(1) \quad \int_a^b f(x) \varphi^v(x) dx \quad \text{für } v \rightarrow \infty,$$

wo  $\varphi(x) \geq 0$  ist und im Inneren des Intervalls genau ein positives Maximum besitzt. Er bespricht sodann kritisch eine Arbeit von Hsu (dies. Zbl. 40, 180) über mehrfache Integrale der analogen Form  $\int_I f(x) \varphi(x)^v d\tau(x)$  [ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $d\tau(x)$  Raumelement,  $I$  Integrationsbereich, der im Innern oder auf der Begrenzung ein Maximum von  $\varphi(x)$  enthält] und bemängelt insbesondere die Behandlung des Falles eines Randmaximums sowie die unnötig speziellen, dort über  $I$  und den Rand gemachten Voraussetzungen. Er gibt dann selbst eine in mehrfacher Hinsicht wesentlich allgemeinere Behandlung von Integralen des Typs (2) (s. das oben zitierte



Referat). 1.  $I$  sei meßbar, enthalte den Häufungspunkt  $O$  und besitze dort ein „volles Kontingent“  $\Omega$  von positivem Maß. Das Kontingent  $\Omega$  einer Menge in einem Häufungspunkt  $O$  [im Sinne von Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe (dies. Zbl. 5, 375), Kap. X] heißt dabei „voll“, wenn fast jeder seiner Halbstrahlen eine Strecke  $x = x_0 t$  ( $0 < t \leq 1$ ) enthält, die zu  $I$  gehört. 2.  $\varphi(x)$  sei  $\geq 0$ , habe in  $O$  ein (strenges) Maximum, und es gelte für  $|x| \rightarrow 0$  auf  $I$  die asymptotische Darstellung  $\varphi(x) = \varphi(0) + P_k(x) + o(|x|^k)$  wo  $P_k(x)$  für alle  $x$  stetig, positiv-homogen vom Grade  $k > 0$  und  $< -\alpha^2 |x|^k$  ( $\alpha > 0$ ). 3.  $f(x)$  sei meßbar in  $I$ , stetig und  $\neq 0$  in  $O$ ; ferner sei  $f(x) Q_h(x)$  in  $I$  summierbar, wo  $Q_h(x)$  für alle  $x$  erklärt, meßbar und positiv-homogen vom Grade  $h \geq 0$ , auf der Einheitskugel beschränkt und  $> 0$  sei. Alsdann gilt die allgemeine Formel

$$\int_I f(x) Q_h(x) \varphi(x)^v d\tau(x) \sim f(0) v^{-(h+n)/k} \varphi(0)^{v+(h+n)/k} \int_{\Omega} Q_h(x) e^{P_k(x)} d\tau(x).$$

Verschiedene Beispiele werden durchgeführt, u. a. auch die Abhängigkeit von der „Öffnung“ des Kontingents (z. B. Öffnung eines ebenen Winkelraums) erläutert. — Der später erschienene Vortragsauszug ist tatsächlich älter und, wie ausdrücklich hervorgehoben wird, durch die ausführliche Darstellung überholt.

Hermann Schmidt (Würzburg).

Ascoli, Guido: Sopra un integrale multiplo. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 11, 255—259 (1952).

Es handelt sich um das Integral  $J = \int_{S_n} f_{2m}(x) e^{-g_2(x)} d\tau(x)$ ; hierbei ist  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $d\tau(x)$  das Raumelement im  $S_n$ ,  $f_{2m} = \sum a_{r_1 r_2 \dots r_{2m}} x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_{2m}}$  und  $g_2 = \sum b_{ik} x_i x_k$  sind reelle, ganzrationale Formen von den durch die Indizes angegebenen Graden,  $g_2$  positiv definit. Durch orthogonale Transformation von  $g_2$  auf eine Summe von Quadraten erhält die rechte Seite die Gestalt einer Summe von Produkten einfacher Integrale, die sich in leicht ersichtlicher Weise auf  $\Gamma$ -Integrale zurückführen lassen. Nach Übergang zu invarianter Schreibweise erhält man schließlich die Formel

$$J = \Gamma(m + \frac{1}{2}) \pi^{(n-1)/2} \Delta^{-1/2} \sum a_{r_1 r_2 \dots r_{2m}} b^{r_1 r_2} b^{r_3 r_4} \dots b^{r_{2m-1} r_{2m}}.$$

Dabei ist  $\Delta$  die Diskriminante von  $g_2$ ,  $(b^{ik})$  die komplementäre Matrix von  $(b_{ik})$ . Da die Summe rational in den Koeffizienten der gegebenen Formen ist, ist also für die Ausrechnung die Bestimmung der beim Beweis benutzten Eigenwerte von  $(b_{ik})$  entbehrlich.

Hermann Schmidt (Würzburg).

Good, I. J.: A generalization of Dirichlet's multiple integral. Edinburgh math. Notes 38, 7—8 (1952).

Reduktion eines bestimmten  $n$ -fachen Integrales, dessen Integrand Produkt ist von Faktoren in je einer Veränderlichen. Sonderfall mit  $k = 1, \dots, n$ ;  $\sum_{q=1}^k \lambda_q = l_k$ .

$$\sum_{q=1}^k x_q = y_k; \sum_{q=1}^k m_q = s_k; m_{n+1} = 0; -1 < m_k; -1 < l_k + s_k:$$

$$\int \dots \int \prod_{0 \leq x_v, y_v \leq 1} (dx_v y_v^{l_v} x_v^{m_v}) = \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(l_k + s_k + k) \Gamma(m_{k+1} + 1)}{\Gamma(l_k + s_{k+1} + k + 1)}.$$

Vgl. auch die Arbeit von A. Selberg [Norsk. mat. Tidsskr. 26, 71—79 (1944)].

W. Maier.

• Vidav, Ivan: Elementare Herleitung einer Flächenformel für Figuren auf der Kugel. (Acad. Sci. Art. Slovenica, Cl. III, Ser. A. Dissertationes IV/2.) Ljubljana 1952. 8 S. u. 5 S. deutsche Zusammenfassg. [Slovenisch].

$r(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , beschreibe eine einfach geschlossene Kurve auf der Einheitskugel,  $p$  sei der Flächeninhalt des von ihr umschlossenen Bereichs;  $\xi(t)$  sei stetig senkrecht auf  $r(t)$ ,  $\xi^2 = 1$ . Verf. beweist auf elementarem Wege  $\int_a^b [r, \xi, d\xi] = 2n\pi - p$ , ( $n$  eine ganze Zahl), und gibt einige Anwendungen.

H. Gericke.

Tschakaloff, Lubomir: Über den Rolleschen Satz, angewandt auf lineare Kombinationen endlich vieler Funktionen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 591—593 ungarische und russ. Zusammenfassungen 594 (1952).

Si considera un complesso qualunque di  $m + 1$  funzioni reali  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$  definite in uno stesso intervallo chiuso  $(a, b)$  dell'asse  $x$  ed ivi continue, tutte derivabili nell'interno di  $(a, b)$  e tali che  $f_k(a) = f_k(b) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ). Si dimostra l'esistenza d'un intervallo più ristretto  $(a + \delta, b - \delta)$  (con  $\delta > 0$ ), soddisfacente alla condizione che, qualunque siano le  $m + 1$  costanti reali  $c_0, c_1, \dots, c_m$ , la derivata della combinazione lineare  $c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \dots + c_m f_m(x)$  si annulla in almeno un punto dell'intervallo  $(a + \delta, b - \delta)$ . Si accenna ad alcune conseguenze di questa proposizione. T. Viola.

## Allgemeine Reihenlehre:

**Knopp, Konrad: Folgenräume und Limitierungsverfahren. Ein Bericht über Tübingen Ergebnisse.** Rend. Mat. e Appl. 11, 269—298 (1952).

Verf. berichtet über neuere Entwicklungen in der Limitierungstheorie. Anfänglich wurden spezielle Limitierungsverfahren betrachtet ((Cesàro, Hölder, Borel), dann setzte sich auch hier die Tendenz zum Allgemeinen durch, wobei sich Limitierungstheorie und Funktionalanalysis gegenseitig befruchteten. 1913 gab Toeplitz seine Permanenzbedingungen, die 1922 Hahn in seine Untersuchungen über Folgen linearer Operationen einordnete. In den zwanziger Jahren baute Banach die Theorie der  $B$ -Räume auf. 1930 zeigte Mazur, daß die Wirkfelder normaler Matrixverfahren als  $B$ -Räume aufzufassen sind und daß sich auf diesem Wege Verträglichkeitsfragen klären lassen. Um aber beliebige Matrixverfahren zu behandeln, muß man statt  $B$ -Räumen die allgemeineren  $F$ - oder  $B_0$ -Räume verwenden. Das wurde 1933 von Mazur und Orlicz erkannt, damals jedoch nur andeutungsweise veröffentlicht. So kam es, daß später die Theorie der  $F$ -Räume von anderen Verf. entwickelt und in die Limitierung eingebaut wurde (Mackey, Bourbaki-Kreis, Ref.). Das Wirkfeld eines beliebigen Matrixverfahrens ist ein  $FK$ -Raum, d. h. ein  $F$ -Raum mit „koordinatenweiser Konvergenz“. Eine Matrixabbildung eines  $FK$ -Raumes in einen zweiten ist immer stetig. Zusammen mit dem „Grundmengenprinzip“ gestattet das die Aufstellung vieler Sätze vom „Toeplitztyp“. Auf solche Sätze kann man die meisten Limitierungsprobleme (Vergleich, Konvergenzfaktoren, Größenordnung, teilweise auch Umkehrbedingungen) unmittelbar zurückführen. Wichtig sind besonders die perfekten Verfahren (in deren Wirkfeld die konvergenten Folgen nicht liegen; Mazur). Eine verstärkte Perfektheit besitzen die Verfahren  $A$ , bei denen  $(AK) \sup_{n,r} \left| \sum_{k=0}^r a_{nk} s_k \right| < \infty$  für jedes  $\{s_k\}$  des Wirkfeldes gilt; bei diesen  $A$  bilden nämlich  $\{1, 1, 1, \dots\}$ ,  $\{1, 0, 0, \dots\}$ ,  $\{0, 1, 0, 0, \dots\}$ , ... eine Basis im Wirkfeld (1950 Wilansky und Ref.). Die Ungleichung  $(AK)$  ist bei speziellen Verfahren, etwa  $C_p$  für  $0 < p \leq 1$ , seit langem bekannt und für Vergleich, Konvergenzfaktoren und Umkehrbedingungen ausgenutzt worden (Riesz, Hardy, Bösanquet u. a.). Die Deutung von  $(AK)$  als Existenz einer Basis gestattet unmittelbar eine allgemeine Formulierung dieser Ergebnisse, wie schon die beiden obgenannten Autoren erkannt haben. Im Anschluß an die Untersuchungen des Ref., teilweise noch vor deren Veröffentlichung, haben andere Mathematiker (Jurkat, Peyerimhoff) vor allem die Anwendungen auf spezielle Verfahren ausgebaut. Mit Hilfe von  $FK$ -Räumen und  $(AK)$  kann man auch leicht „Inäquivalenzsätze“ für Limitierungsverfahren aufstellen, also eine Klasseneinteilung der Verfahren erhalten. K. Zeller.

**Boyd, A. V. and J. M. Hyslop: A definition for strong summability and its relationship to strong Cesàro summability.** Proc. Glasgow math. Assoc. 1, 94—99 (1952).

Let  $k, p$  and  $p'$  be constants such that  $k > 0$ ,  $p \geq 1$ ,  $p^{-1} + p'^{-1} = 1$  and  $k p' > 1$ . A series  $\sum a_n$  is said to be strongly evaluable to  $s$  by the Riesz method  $(R, k)$  of order  $k$  if the transform  $C_k(x) = \sum_{n < x} \left(1 - \frac{n}{x}\right)^k \cdot a_n$  converges to  $s$  as

$x \rightarrow \infty$  and, in addition  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \int_1^x |u C'_k(u)|^p du = 0$ . It is shown that  $\sum a_n$  is strongly evaluable  $(R, k)$  if and only if it is strongly evaluable by the Cesàro method  $(C, k)$ . R. P. Agnew (M. R. 14, 463).

**Hyslop, J. M.: Note on the strong summability of series.** Proc. Glasgow math. Assoc. 1, 16—20 (1952).

A series  $\sum a_n$  with Cesàro transform  $C_n^{(k)}$  of positive order  $k$  is said to be strongly



evaluable  $(C, k)$  with index  $p$ , or to be evaluable  $[C, k, p]$  to  $s$  if  $\frac{1}{n} \sum_{v=0}^n |C_v^{(k-1)} - s|^{p \rightarrow 0}$  as  $n \rightarrow \infty$ . If  $p \geq 1$ , then  $\sum a_n$  is evaluable  $[C, k, p]$  if and only if it is evaluable  $(C, k)$  and  $\frac{1}{n} \sum_{v=0}^n v^k |C_v^{(k)} - C_{v-1}^{(k)}| \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . If  $p \geq 1$  and  $\sum a_n$  is evaluable  $[C, k, p]$ , then  $\sum a_n$  is evaluable  $[C, k + h, q]$  when  $h > 0$  and  $0 < q \leq p$ .

R. P. Agnew (M. R. 14, 368).

Serebrjakov, B. G.: Verallgemeinerung einiger Summationssätze. Ukrain. mat. Žurn. 4, 204—211 (1952) [Russisch].

Let us consider the series (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  with real terms; its negative terms we shall denote by  $a_n^-$  ( $a_n^- < 0$ ) and the not-negative ones by  $a_n^+$  ( $a_n^+ \geq 0$ ). The author of the paper proves that if the following relationships are satisfied: 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^+ = 0$ ,

2. the sequence  $\{n a_n^-\}$  is bounded (or vice versa), following equalities are true:

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^n a_v = \lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^n a_v = \lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  where the limits can be finite or infinite. Whereas for any sequence  $\{\omega_n\}$  with positive terms increasing to  $+\infty$  (for instance  $\sqrt{n}$ ), there exists a series (a) satisfying the conditions: 1. and 3.  $n |a_n^-| < \omega_n$ , for which the equalities (b) don't take place. From this theorem the author makes some conclusions concerning the Dirichlet's series.

L. Włodarski.

Rajagopal, C. T.: A note on generalized Tauberian theorems. Addendum. Proc. Amer. math. Soc. 3, 457—458 (1952).

Details of proof of Lemma 9 in the author's paper in the same Proc. 2, 335—349 (1951; this Zbl. 54, 27).

G. G. Lorentz (Math. Rev. 13, 836).

Paterson, S.: The summation of a slowly convergent series. Edinburgh math. Notes 38, 5—7 (1952).

Le serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} e^{-n^2 x}$  in cui  $r$  è un intero convergono rapidamente per  $x$  grande e assai lentamente per  $x$  positivo e prossimo a zero. L'A. ottiene una trasformazione della serie data che converge rapidamente per valori piccoli di  $x$ . Conferma ciò con alcuni controlli numerici.

S. Faedo.

Emersleben, Otto: Über die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2 + c^2)^2}$ . Math. Ann. 125, 165—171 (1952).

Bezeichnen wir die Summe der im Titel genannten Reihe mit  $s(c)$ , so hat Mathieu ohne zureichende Begründung behauptet, daß  $s(c) < 1/2c^2$  für reelles  $c > 0$  ist. Verf. beschränkt sich zunächst auf ganzzahlige  $c$  und bemerkt, daß  $a(x) = x/(x^2 + c^2)^2$  für  $0 < x < c$  konvex nach oben, für  $x > c$  konvex nach unten ist. Die Anwendung der Sehnentrapezformel und der Tangententrapezformel auf  $\int a(x) dx$  in beiden Intervallen ergibt eine Abschätzung von  $s(c)$  und damit  $c^2 s(c)$  für ganze  $c$  nach oben und unten. Partialbruchzerlegung im Komplexen und Heranziehen der Integraldarstellung für  $u^{-s} \Gamma(s)$  liefert für  $c^2 s(c)$  eine Integraldarstellung, aus der folgt, daß  $c^2 s(c)$  mit  $c$  monoton wächst. Zusammen mit dem ersten Ergebnis hat man damit nicht nur die durch eine untere Schranke ergänzte Behauptung von Mathieu, sondern darüber hinaus noch, daß diese nicht mehr zu verbessern ist.

M. Krafft.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Huszár, Géza: Sur une méthode nouvelle d'interpolation. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 727—729, russische und französ. Zusammenfassungen 730 (1952) [Ungarisch].

Vorliegende Arbeit ist ein Vorbericht. Beweise werden nicht mitgeteilt, zwei einfache numerische Beispiele sind zur Illustration gegeben.

St. Vincze.

**Nikol'skij, S. M.:** Ungleichungen für ganze Funktionen endlicher Ordnung und ihre Anwendung in der Theorie der differenzierbaren Funktionen mehrerer Veränderlicher. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 244—278 (1951) [Russisch].

Diese Arbeit enthält im wesentlichen eine genaue Darstellung der in einer früheren Note des Verf. (vgl. dies. Zbl. 43, 56) angekündigten Theorie über die beste Annäherung von Funktionen von  $n$  (reellen) Variablen mit bestimmten Differenzierbarkeitseigenschaften durch ganze Funktionen. Der Verf. überträgt diese Theorie auf die Annäherung von periodischen Funktionen von  $n$  Variablen durch trigonometrische Polynome.

W. Thimm.

**Bernštejn (Bernstein), S. N.:** Bemerkungen zur Theorie der regulär monotonen Funktionen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 3—16 (1952) [Russisch].

Una funzione  $f(x)$ , reale di variabile reale, è detta regolarmente monotona (RM) nell'intervallo  $(a, b)$ , se è dotata di tutte le derivate successive in  $(a, b)$  e ciascuna di queste derivate conserva segno costante in  $(a, b)$ . L'A. dopo aver posto questa definizione nel suo trattato: *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* (Paris 1926), ed esser tornato più volte sull'argomento anche ultimamente (cfr. questo Zbl. 39, 69), studia qui particolari classi di funzioni RM, specialmente di funzioni che sono anche assolutamente convesse, che cioè soddisfano anche alla condizione:  $f^{(2k)}(x) \geq 0$  per  $x \in (a, b)$  e  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Tali funzioni si riducono a particolari polinomi, quando si aggiunga l'ulteriore condizione restrittiva: le differenze fra valori consecutivi di  $s$ , tali che risulti  $f^{(2s-1)}(x) f^{(2s+1)}(x) \leq 0$ , formano un insieme numerico limitato. Altre funzioni RM studiate sono ciclicamente monotone (quando i segni delle derivate successive si alternano), o ciclicamente convesse (quando  $f^{(2k)}(x) f^{(2k+2)}(x) \leq 0$  per  $k = 0, 1, 2, \dots$ ), ecc. — I risultati ottenuti, che appartengono ad uno dei capitoli più profondi e complessi dell'analisi quantitativa, esprimono interessanti proprietà estremali delle suddette funzioni.

T. Viola.

**Geronimus, Ja. L.:** Über die orthogonalen Polynome von V. A. Steklov. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 469—480 (1952) [Russisch].

Steklov hatte 1921 [Izvestija Rossijskoj Akad. Nauk. 15, 281—326] die Klasse derjenigen normierten Orthogonalpolynome zum Gewicht  $w(x)$  herausgestellt, und ihre ausgezeichneten Eigenschaften erörtert, welche als ganzes Orthonormalsystem auf dem Grundintervall gleichmäßig beschränkt bleiben. Es ist seitdem wiederholt versucht worden, Steklovs Hinweis, daß er weder die Bedingungen, unter denen diese Eigenschaft eintritt, sichern, noch durch ein Gegenbeispiel widerlegen könne, befriedigend zu erledigen. Nach einer Übersicht über einige dieser Unternehmungen gibt Verf. den folgenden Satz: Damit ein Orthonormalsystem  $\hat{\varphi}(x)$  zum Gewicht  $w(x)$  und dem Grundintervall  $[-1, +1]$  die von Steklov geforderte Eigenschaft  $|\hat{\varphi}(x)| \leq C$  auf dem ganzen Intervall habe, ist hinreichend, daß die Funktion  $p(\vartheta) = w(\cos \vartheta) |\sin \vartheta|$  nach beiden Seiten positiv beschränkt sei,  $0 < m_1 \leq p(\vartheta) \leq m_2$ , fast überall auf  $[0, 2\pi]$ , und daß sie der Lipschitzklasse  $\text{Lip}(\alpha, 2)$  mit  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$  angehöre. — Der Beweis benutzt wesentlich Hilfsmittel aus dem Umkreis Privalovscher Untersuchungen über Randeigenschaften.

E. Ullrich.

**Yano, Shigeki:** Cesàro summability of Fourier series. J. Math. 1, 32—34 (1951).

**Mohanty, R.:** Absolute Cesàro summability of a series associated with a Fourier series. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 152—154 (1952).

The author gives a sufficient condition for the point-wise absolute Cesàro summability of the series  $\sum A_n(x) \log n$  where  $\sum A_n(x)$  is a Fourier series. It is difficult to see the interest or importance or finality of such results, in the absence of any such indication by the author.

K. Chandrasekharan.

**Pati, T.:** On the absolute Riesz summability of Fourier series and its conjugate series. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 155—168 (1952).

The results stated here seem to be a proper subset of the results of another paper by the same author (cf. this Zbl. 57, 301).

K. Chandrasekharan.

**Berkovitz, L. D.:** On double trigonometric integrals. Trans. Amer. math. Soc. 73, 345—372 (1952).



The author extends some of the results of Wolf (this Zbl. 34, 190) and of Zygmund [Math. Z. 24, 47—104 (1926); this Zbl. 29, 119] on the equi-convergence and equi-summability of trigonometric integrals and series, from one to several variables.

*K. Chandrasekharan.*

**Duffin, R. J. and A. C. Schaeffer:** A class of nonharmonic Fourier series. Trans. Amer. math. Soc. 72, 341—366 (1952).

This paper contains some significant contributions to the Theory of Non-Harmonic Fourier Series initiated by Paley and Wiener. Let  $H$  be a Hilbert Space. A sequence  $(\Phi_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  of elements of  $H$  is said to be a frame if there exist positive constants  $A$  and  $B$  such that, for every vector  $v$  in  $H$ ,  $A \|v\|^2 \leq \sum_n |(v, \Phi_n)|^2 \leq B \|v\|^2$  where  $(u, v)$  denotes the scalar product

of the vectors  $u$  and  $v$  in  $H$ . A sequence  $(\lambda_n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  of complex numbers is said to be of uniform density  $d > 0$  if there exist positive constants  $L$  and  $\delta$ , such that  $|\lambda_n - n/d| \leq L$  and  $|\lambda_n - \lambda_m| \geq \delta$  ( $m \neq n$ ). With these definitions, the main result of the paper is that if  $(\lambda_n)$  be a sequence of uniform density  $d$ , then the functions  $\{\exp(i \lambda_n t)\}$  form a frame in the Hilbert Space  $L_2(-\gamma, \gamma)$  provided  $0 < \gamma < \pi d$ . By using Fourier transforms, this result is equivalent to the statement that, for every entire function  $f(z)$  of exponential type  $\gamma$  such that  $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$  the relation

$$A \leq \sum_n |f(\lambda_n)|^2 \leq B \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq B$$

is valid and it is further shown that the above result remains true if either the numerator or the denominator of the middle ratio is finite. The above result on the sequence  $\{\exp(i \lambda_n t)\}$  is further generalized by showing that if  $\lambda_n = \alpha_n + i \beta_n$ , the sequence  $(\beta_n)$  is bounded and  $\exp(i \alpha_n t)$  is a frame then the original sequence  $\{\exp(i \lambda_n t)\}$  is itself a frame in  $L_2(-\gamma, \gamma)$ . Again,  $\{\exp(i \lambda_n t)\}$  is a frame in  $L_2(-\pi, \pi)$  if  $(\beta_n)$  is bounded and  $|\alpha_n - n| \leq M < (\log 2)/\pi$ . This generalizes the result, due to Paley and Wiener, that if  $|\lambda_n - n| < 1/\pi^2$ , then  $\exp(i \lambda_n t)$  is complete in  $L_2(-\pi, \pi)$ . The paper also contains some properties of frames in general in a Hilbert space. The authors prove that if an element is removed from a frame, the rest constitute either a frame or an incomplete set. An exact frame is one which ceases to be a frame when some one element is removed. The authors prove that if  $\{\exp(i \lambda_n t)\}$  is an exact frame, then the set will cease to be a frame if any function of the set is removed. The authors also discuss the mean convergence and pointwise convergence of the non-harmonic Fourier series of a function associated with  $\{\exp(i \lambda_n t)\}$  when  $(\lambda_n)$  is a sequence of uniform density one and show that these are to a large extent the same as for ordinary Fourier series.

*V. Ganapathy Iyer.*

**San Juan, Ricardo:** Einige Sätze über die Ableitung asymptotischer Potenzreihen. Collect. Math. 5, 269—284 (1952) [Spanisch].

Bekanntlich kann man aus einer asymptotischen Potenzentwicklung einer differenzierbaren Funktion einer reellen Veränderlichen nicht ohne weiteres auf die asymptotische Darstellung der Ableitung durch die abgeleitete Reihe schließen, sondern muß die Existenz einer asymptotischen Entwicklung für die letztere voraussetzen. Dagegen ist diese Voraussetzung bei analytischen Funktionen im Komplexen für weite Klassen von Gebieten  $\mathfrak{G}$  entbehrlich [sogar für Entwicklungen nach allgemeinen Skalen, vgl. die Bemerkungen des Ref. Math. Ann. 113 (dies. Zbl. 16, 208) S. 648 Folgerung 2. Z. 5 Druckfehler: lies „o“ statt „O“] wobei allerdings u. U. eine Beschränkung auf ein Teilgebiet  $\mathfrak{G}'$  in Kauf genommen werden muß. In  $\mathfrak{G}$

gültige Abschätzungen  $\left| f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^{\pm \nu} \right| \leq m_n |z|^{\pm n}$  ( $n = 1, 2, \dots, \pm$  je nachdem  $z \rightarrow 0$  oder  $z \rightarrow \infty$  betrachtet wird) sind ferner ebenfalls nicht ohne weiteres auf  $f'(z)$  und  $\mathfrak{G}'$  übertragbar, man muß vielmehr mit wesentlich ungünstigeren Konstanten  $m'_n$  rechnen. Dies wird zunächst für einen Kreisabschnitt mit Scheitel in  $z = 0$  durch Berechnung von Größen  $m'_n$  für einen inneren Teilsektor dargetan. Weiterhin betrachtet Verf. für die Ableitung Abschätzungen der Form

$$\left| f'(z) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu a_\nu z^{\pm \nu-1} \right| < m'_{n+1} |z|^{-n-1+p} \quad (p \geq 1)$$

(jede einzelne ist bei  $z \rightarrow \infty$  schlechter als eine entsprechende mit  $p = 0$ , in ihrer Gesamtheit gewährleisten sie aber ebenfalls die asymptotische Entwicklung!). Es wird gezeigt, daß  $m'_{n+1} = C k^n m_n$  gewählt werden kann für die Gebiete:  $\mathfrak{G} = \{\Re(z^{1/\alpha}) > a > 0\}$  mit  $\mathfrak{G}' = \{\Re(z^{1/\alpha}) \geq a' > a\}$ ;  $\alpha > 0$ ,  $p = [1 + 1/\alpha]$ ,  $n \geq p - 1$ ,  $C, k > 0$  fest. (Für  $\alpha > 2$  ist  $\mathfrak{G}$  mehrblättrig zu denken.) Entsprechendes gilt für an den Nullpunkt angrenzende, ein- oder mehrblättrige Gebiete („krummlinig begrenzte Sektoren“) der Gestalt  $\mathfrak{G} = \{|z|^{1/\alpha} - z_0^{1/\alpha}| < |z_0|^{1/\alpha}\}$ , wobei  $z_0$  komplex  $\neq 0$ , und für  $\mathfrak{G}'$  durch  $z_0$  mit  $|z_0| < |z_0|$  zu ersetzen ist. Zum Beweis dient

die Cauchysche Integralformel, wobei die Abschätzung des minimalen Abstands  $d(z)$  eines Punktes von  $\mathcal{G}'$  vom Rand von  $\mathcal{G}$  eine entscheidende Rolle spielt. Diese gelingt hier durch eingehende geometrische Diskussion auf Grund der Tatsache, daß die Ränder beider Gebiete durch Ähnlichkeitstransformation ineinander übergehen und wendepunktfrei sind.

Hermann Schmidt (Würzburg).

**Každan, Z. N.:** Über die Konvergenz von Reihen nach Funktionen der Form  $\varphi(n x)$ . Moskovsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski **163**, Mat. **6**, 99–122 (1952) [Russisch].

Es wird ein Funktionenraum betrachtet mit der Eigenschaft, daß mit  $\varphi(x)$  auch  $\varphi(n x)$  für jedes  $n = 1, 2, \dots$  diesem Raum angehört. Dann zeigt sich, daß einige Sätze aus der Theorie der trigonometrischen Reihen sich verallgemeinern lassen auf Reihen der Form  $\sum a_n \varphi(n x)$  (insbesondere Sätze über die absolute Konvergenz der trigonometrischen Reihen), bei ziemlich geringen Voraussetzungen, die man dabei an die Funktion  $\varphi(x)$  stellen muß. Jedoch lassen andere Sätze eine solche Verallgemeinerung nicht immer zu, selbst bei scharfen Einschränkungen bezüglich  $\varphi(x)$ . Diese Tatsache gibt Anlaß dazu, die folgende Frage zu stellen: Es sei eine Klasse von Funktionen  $\varphi(x)$  gegeben und es werde verlangt, daß die Reihe  $\sum a_n \varphi(n x)$  gewisse Eigenschaften besitzt, die unabhängig sind von der Wahl der Funktion aus der betreffenden Klasse. Dann fragt man nach den Bedingungen, die die Koeffizienten einer solchen Reihe erfüllen müssen. Verf. untersucht dies für die Klasse derjenigen Funktionen, die stetig und zur Einheit orthogonal sind, und als Eigenschaft der Reihe wird deren Konvergenz auf verschiedenen Mengen betrachtet. Ferner wird die Konvergenz der Reihe  $\sum a_n \varphi(n x)$  untersucht bei beliebiger Vertauschung der Glieder und ein Satz bewiesen, der sich nun nicht mehr auf ein System  $\{\varphi(n x)\}$  bezieht, sondern auf ein beliebiges System quadratisch integrierbarer Funktionen.

N. Stuloff.

### Spezielle Funktionen:

**Huff, William N. and Earl D. Rainville:** On the Sheffer  $A$ -type of polynomials generated by  $\Phi(t)f(xt)$ . Proc. Amer. math. Soc. **3**, 296–299 (1952).

Es handelt sich um Bedingungen dafür, daß die durch die formale Entwicklung

$$\Phi(t)f(xt) = \sum_0^\infty y_n(x)t^n, \text{ wo } f(t) = \sum_0^\infty \frac{a_n t^n}{n!} \text{ und } \Phi(t) = \sum_0^\infty \frac{b_n t^n}{n!} \text{ (} b_0 \text{ und alle } a_n \neq 0 \text{)}$$

definierte Folge von Polynomen  $y_n(x)$  genau  $n$ -ten Grades vom Shefferschen „ $A$ -Typ  $k$ “ ist (vgl. dies. Zbl. **22**, 15), was darauf hinauskommt, daß mit einer Folge von Polynomen  $L_j(x)$  vom Maximalgrad  $k$  die Beziehungen bestehen

$P_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^n L_j(x) P_n^{(j)}(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Unter Benützung eines früheren Ergebnisses (s. dies. Zbl. **32**, 64) wird gezeigt, daß hierfür notwendig und hinreichend ist, daß  $f(t/\alpha)$  eine hypergeometrische Reihe mit  $k$  Nennerparametern und ohne Zählerparameter ist ( $\alpha \neq 0$ , fest). Dabei wird  $L_j(x)$  von der Form  $\gamma_{j-1} \cdot x^{j-1}$  ( $j \leq k+1$ ), und  $= 0$  für  $j > k+1$ .

Hermann Schmidt (Würzburg).

**Ghermanescu, Michel:** Caractérisation fonctionnelle des fonctions trigonométriques. Bull. Inst. Politechn. Jassy **4**, 362–369 (1949).

Verf. löst das Funktionalgleichungssystem

$$(*) \quad \begin{aligned} F(x, y) f(x+y) &= f(x) f(y) - g(x) g(y), \\ F(x, y) g(x+y) &= f(x) g(y) + g(x) f(y) \end{aligned}$$

von meßbaren Funktionen auf zwei Arten, nämlich durch Zurückführung auf die Funktionalgleichung  $w(x+y) = w(x)w(y)$  für die komplexe Funktion einer reellen Veränderlichen  $w(x) = [f(x) + i g(x)]/[f(x) - i g(x)]$ , deren allgemeine (meßbare) Lösung [vgl. z. B. N. H. Abel, J. reine angew. Math. **1**, 311–339 (1826), Oeuvres complètes I., Christiania 1881, 219–250; W. Sierpiński, Fundamenta Math. **1**, 116–122 (1920)]  $w(x) = e^{(a+bi)x}$  ist (die vom Verf. beiseite gelassene triviale Lösung  $w(x) = 0$  hat keine Bedeutung), bzw. durch Zurückführung auf das ebenfalls wiederholte untersuchte Funktionalgleichungssystem, das aus (\*) mit  $F(x, y) = 1$  entsteht [vgl. u. a. J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une



variable, Paris, 1896; L. Vietoris, dies. Zbl. 60, 191; auch die vorliegende Arbeit enthält ein weiteres Lösungsverfahren]. Der zweite Beweis, der mit der Bestimmung von  $F(x, y) = h(x)h(y)/h(x+y)$ ,  $h(x) = \sqrt{f(x)^2 + g(x)^2}$  beginnt, scheint wegen der Zweiwertigkeit der Quadratwurzel noch gewisse Probleme zu ergeben. Die allgemeinsten meßbaren Funktionen  $f, g$ , die (\*) erfüllen, sind  $f(x) = h(x) \cos cx$ ,  $g(x) = h(x) \sin cx$  (die meßbare Funktion  $h(x)$  und die Konstante  $c$  beliebig). Ferner werden die Gleichungen  $f(x+y)^2 - 2f(x)f(y)f(x+y) + f(x)^2 + f(y)^2 = 1$ ,  $h(x+y) = [h(x) + h(y)]/[1 - h(x)h(y)]$  und  $f(x)f(y-z) + f(y)f(z-x) + f(z)f(x-y) = 0$  gelöst [für die beiden letzteren Gleichungen s. R. Caccioppoli, Giorn. mat. Battaglini 66, 69—74 (1928) bzw. P. Montel, dies. Zbl. 1, 339] und zwar durch Zurückführung auf  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$  [J. d'Alembert, Histoire de l'Acad. de Berlin, 355—360 (1750) sowie L. Vietoris loc. cit.] bzw. auf (\*) bzw. auf die Funktionalgleichung  $F(x, y) + F(y, z) + F(z, x) = 0$  [D. M. Sinzow, Arch. Math. Phys., 3. Ser. 6, 216—217 (1903)]. Die Funktionalgleichung  $g(x+y)^2 + 2g(x+y)[2g(x)g(y) - g(x) - g(y)] + [g(x) - g(y)]^2 = 0$  wird auf  $g(x+y) + g(x-y) + 4g(x)g(y) - 2g(x) - 2g(y) = 0$  zurückgeführt. Wie Verf. dem Ref. brieflich mitteilte, hat er die letztere Gleichung seither gelöst. — Die Erörterungen der vorliegenden Arbeit sind klar gefaßt und leicht verständlich. J. Aczél.

Olver, F. W. J.: Some new asymptotic expansions for Bessel functions of large orders. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 414—427 (1952).

Verf. weist zunächst auf die bekannte Tatsache hin, daß die asymptotischen Entwicklungen von Meissel und Debye für Zylinderfunktionen, bei denen Argument  $z$  und Index  $\nu$  von gleicher Größenordnung ins Unendliche wachsen, nicht mehr brauchbar sind, wenn  $|z - \nu|$  von gleicher Größenordnung mit  $u = \nu^{1/3}$  ist [genauer: wenn  $(z - \nu):u$  weder gegen 0 noch gegen  $\infty$  strebt]. An Stelle der für diese Fälle von Nicholson und Watson angegebenen Näherungsformeln gewinnt er, mit durchsichtiger exakter Begründung, volle asymptotische Entwicklungen, und zwar bei  $z = u^3 + \tau u$  ( $z, \nu$  komplex,  $-\pi/2 < \arg \nu < 3\pi/2$ ,  $\tau = O(1)$ ) für die 1. Hankelsche Funktion

$$H_{\nu}^{(1)}(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{u^{2s+1}} \chi_s(\tau), \quad \text{wo} \quad \chi_s(\tau) = \sum_{r=0}^s (-1)^r f_{sr} \tau^r F_{r+2s}(\tau). \quad \text{Hier ist } F_s(\tau) =$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pi i/3) w^s \exp\left(\frac{w^3}{6} + \tau w\right) dw \text{ als Linearkombination (mit rekurrent berechenbaren Poly-}$$

nomen in  $\tau$  als Koeffizienten) zweier Airyscher Integrale  $\frac{1}{\pi i} \int_{\mathcal{C}} \exp\left(\frac{t^3}{3} - xt\right) dt$  und ihrer 1. Ableitungen darstellbar ( $\mathcal{C}$  ein passender unendlicher Integrationsweg,  $x = -2^{1/3} \tau$ ). Hieraus kann, auch auf die übrigen Zylinderfunktionen geschlossen werden. Der Beweis beruht auf der Transformation des Integranden in der Sommerfeldschen Integraldarstellung auf die Gestalt  $\exp(u^3 v^3/6 + \tau u v) f(v, \tau u) dv$ , wo  $f(v, \tau u)$  eine Entwicklung nach Produkten gerader Potenzen von  $v$  mit Polynomen in  $\tau u v$  gestattet, gliedweiser Integration und Restabschätzung. Nach Methode und Ergebnis entspricht dieser Teil der Arbeit durchaus den Entwicklungen von Schoebe [Vgl. den Vorbericht „Archiv der Mathematik“ 1, 230—232 (1948/49) und die ausführliche Darstellung (1954, dies. Zbl. 57, 55); vgl. insbesondere 275 (20), 281 (27)]. Allerdings wird bei Schoebe an Stelle der Entwicklungsgröße  $\tau = (z - \nu)/\nu^{1/3}$  die Größe  $\zeta = (z - \nu)/z^{1/3}$  bevorzugt, die von vornherein in einem beschränkten Bereich variabel gedacht wird, während (zunächst) bei Olver  $\tau$  fest ist; doch scheinen diese Unterschiede unwesentlich. Es folgen noch orientierende Bemerkungen über die numerische Brauchbarkeit der Ergebnisse, insbesondere Hinweis auf Überdeckung mit Gebieten, wo auch die älteren Reihen anwendbar sind. Schließlich werden Anwendungen auf die asymptotische Darstellung der Nullstellen fester Nummer  $s$  der Funktionen  $J_n(x)$  und  $Y_n(x)$  und ihrer Linearkombinationen (mit reellen Koeffizienten) für ganzzahliges  $n \rightarrow \infty$  gemacht; frühere, auf ganz anderem Weg erhaltene Ergebnisse des Verf. [vgl. Proc. Cambridge Phil. Soc. 47, 699—712 (1951, dies. Zbl. 54, 33)] werden dadurch neu gewonnen und verallgemeinert. Hermann Schmidt (Würzburg).

Guinand, A. P.: A note on the logarithmic derivative of the gamma function. Edinburgh math. Notes 38, 1—4 (1952).

Ein elementarer Beweis für die (bisher unbekannte?) Tatsache, daß  $\psi(x+1) - \log x$  in  $(0, \infty)$  selbstreziprok ist bezüglich des Kerns  $2 \cos 2\pi x$  ( $\psi(x) = \Gamma': \Gamma$  und ein zunächst für positive rationale  $x$  mit einfachen Gitterpunktmethoden ge-

fürher Beweis der in  $|\arg z| < \pi$  gültigen Identität

$$\sum_1^{\infty} \{\psi(1+nz) - \log nz - (2nz)^{-1}\} + (2z)^{-1} (\gamma - \log 2\pi z) \\ = z^{-1} \sum_1^{\infty} \{\psi(1+nz^{-1}) - \log nz^{-1} - z(2n)^{-1}\} + \frac{1}{2} (\gamma - \log (2\pi z^{-1}))$$

bilden den Inhalt dieser schönen Note.

G. Hoheisel.

## Funktionentheorie:

Mergeljan, S. N.: Gleichmäßige Annäherungen von Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 2 (48), 31—122 (1952) [Russisch].

Probleme der gleichmäßigen Approximation im Komplexen werden nach drei Hauptrichtungen hin zu wesentlichen Fortschritten geführt: I. Gleichmäßige Approximation mit Hilfe von Polynomen und rationalen Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Mengen  $E$ . Die zu approximierende Funktion  $f(z)$  wird dabei als stetig auf  $E$  und als analytisch nur in Innenpunkten von  $E$  vorausgesetzt: Klasse  $A(E)$ . Damit greift die Untersuchung wesentlich über die klassische komplexe Funktionentheorie hinaus. Im Zusammenhang damit wird als ein Maß der Abweichung von der Analytizität bei  $f(z) = u(z) + i v(z)$  mit (stetigen) partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Ausdruck eingeführt

$$M = \max_{z \in R} \left| \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right|;$$

$R$  bedeutet die Teilmenge der Punkte von  $E$ , wo  $f(z)$  nicht analytisch ist, dann  $G_1, \dots, G_n$  die Restgebiete, die  $E$  aus der Ebene übrig läßt; sei  $\delta$  Schranke für den Abstand eines beliebigen Punktes von  $R$  zum Komplement von  $E$ ,  $d = \min_{1 \leq v \leq n} (\delta,$

Durchmesser  $G_v$ ), so ist es stets möglich,  $f(z)$  auf  $E$  durch eine rationale (also analytische!) Funktion  $R(z)$  (mit je einem vorgegebenen Pol in jedem  $G_v$ ) zur Güte

$$\max_{z \in E} |f(z) - R(z)| < C M \delta^3 d^{-2}$$

zu approximieren;  $C$  ist absolute Konstante. Außerdem wird eine ähnlich gerichtete Schätzung der möglichen Approximationsgüte für den Fall einer  $f(z)$  gegeben, die durch ihren Stetigkeitsmodul  $\omega(\delta)$  umschrieben ist:  $\omega(\delta) = \max |f(z_1) - f(z_2)|$  für  $|z_1 - z_2| \leq \delta$ , und  $z_1, z_2 \in E$ . Als Hauptsatz dieses Teils erscheint dann die Aussage, daß eine auf  $E$  gegen  $f(z)$  gleichmäßig konvergente Folge von Polynomen dann und nur dann existiert, wenn  $f(z) \in A(E)$  und wenn  $E$  als Komplement nur ein Gebiet um  $\infty$  zuläßt. An diese Aussage, die erschöpfende Auskunft gibt, auf welchen Mengen und für welche Funktionen Approximation durch Polynome möglich ist, wird ein Verfahren zur Konstruktion der Näherungen angeschlossen, welches freilich die Kenntnis der Abbildungsfunktion eines Hilfsgebietes in den Kreis — bis zu hinreichend großer Genauigkeit — voraussetzt; im übrigen ruht es auf der Bildung von Integralmitteln über  $E$ , verläuft aber algorithmisch nach „einfachem“ Schema. Darin liegt ein erheblicher Fortschritt: Bisher war die explizite Gestalt solcher Näherungen (an  $f(z)$  auf  $E$ ) nur in eingeschränkten Fällen „zugänglich“. — Für Mengen  $E$ , die die Ebene zerlegen, und die zunächst als nirgends dicht angenommen werden, wird erst durch ein Gegenbeispiel belegt, daß die Approximation durch rationale Funktionen nicht ohne Einschränkungen über die Struktur der Menge möglich sei; dann werden einige solcher Einschränkungen im Anschluß an die beiden obigen Aussagen zur Approximationsgüte vorgeführt: Z. B. reicht hin, daß jeder Kreis vom Radius  $\delta$  einen Jordanbogen vom Durchmesser  $l(\delta)$  enthalte, der dem Komplement von  $E$  angehört, und daß dann  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^3 l(\delta)^{-2} = 0$  sei. Für  $f(z) \in A(E)$  ist die Darstellung durch gleichmäßig konvergente Reihen rationaler Funktionen



immer möglich, wenn  $E$  abgeschlossen, beschränkt und der Art ist, daß jedes der Restgebiete einen Durchmesser  $\geq p > 0$  hat; dies ein kurz angegebbarer Satz aus einer Gruppe ähnlicher Aussagen. — Endlich wird der Zusammenhang mit der Theorie normierter Funktionenringe behandelt. — II. Hier wird die gleichmäßige Approximation verschiedener Klassen analytischer oder stetiger Funktionen durch ganze (transzendente) Funktionen untersucht. Diese werden oft von der Ordnung 1 und endlichem Typus  $p$  gewählt (auch „Exponentialtyp“, oder „Grad“  $p$ ): sie bilden die Klasse  $H_p$ . Als Menge  $E$ , auf der approximiert werden soll, dienen vorzüglich erst die reelle Achse, dann allgemeinere, Carlemansche Kontinua (s. u.). Sei  $A_p(f) = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x) - S_p(x)|$  für alle  $S_p(x) \in H_p$ ; man kennt die Beziehungen zur Poly-

nomapproximation auf dem Intervall  $[-\lambda, +\lambda]$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  durch Bernstein, was hier bei weiten Annahmen über  $f$  ergänzt wird. Ist  $f(x)$  längs der  $x$ -Achse beschränkt, so wird die dort gleichmäßige Stetigkeit von  $f(x)$  notwendig und hinreichend für  $\lim_{p \rightarrow \infty} A_p(f) = 0$ . — Eine wesentlich allgemeinere Aussagengruppe ist schon von

Carleman heraufgeführt: erstens werden allgemeinere Mengen  $E$  zugelassen, die sich ins Unendliche erstrecken, zudem aber wird zwischen gegebener Funktion  $f(z)$  und approximierender ganzer Funktion  $G(z)$  nicht bloß ein fester Abstand  $\leq \varepsilon$  auf  $E$ , sondern Berührung im Unendlichen gefordert, d. h.  $|f(z) - G(z)| \leq \varepsilon(|z|)$ , wo  $\varepsilon(r)$  eine beliebige Funktion mit positiver unterer Grenze auf jedem endlichen Intervall, sowie  $\varepsilon(r) \rightarrow 0$  bei  $r \rightarrow \infty$ , mit vorgeschriebener Ordnung.  $E$  heiße Carlemansches Kontinuum, wenn dort jede beschränkte und auf  $E$  stetige  $f(z)$  zu jedem  $\varepsilon(r)$ , von gegebener Ordnung des Nullstrebens, im Sinne obiger Ungleichung durch eine ganze Funktion approximiert werden kann: Dabei aber werden allgemeinere  $G(z)$  als die aus  $H_p$  zugelassenen, doch bleiben Wachstumsannahmen und -aussagen im Blickfeld. Verf. greift das hierzu Bekannte auf, insbesondere die von Keldyš und Lavrentiev gegebene Kennzeichnung Carlemanscher Kontinuen — sie enthalten keine inneren Punkte; jedes  $z \in E$  kann mit  $\infty$  durch einen Jordanbogen außer  $E$  verbunden werden, der in einen gewissen Kreis  $|t| < \varrho(z)$  nicht eindringt, wobei  $0 < \varrho(t) \uparrow \infty$  — und stellt die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Eigenschaften von  $f(z)$  auf  $E$ , Wachstumseigenschaften von  $G(z)$  und dem jetzt als Carlemankontinuum vorausgesetzten  $E$ . — Es folgt eine Auseinandersetzung mit einer Arbeit von Keldyš [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 47, 243—245 (1945)], deren wertvollen und anregenden Inhalt Verf. neu darstellt und weiterführt. Hier werden wieder innere Punkte für  $E$  zugelassen, und  $f(z) \in A(E)$  angenommen.  $\varepsilon(r)$  darf nicht zu rasch gegen 0 streben: wie man erwartet, wird die Ordnung  $\frac{1}{2}$  kritisch; Approximation solcher Stärke kann ausgeschlossen sein. Das hängt zusammen mit der Existenz nicht identisch verschwindender ganzer Funktionen, die in einer Zunge rascher abnehmen als  $\varepsilon(r)$  — also mit dem Phragmén-Lindelöfschen Problemkreis: Eine längere Reihe von Sätzen bezieht sich auf Existenz und Konstruktion von Näherungen in Winkelräumen und Parallelstreifen. — Bei Approximation beschränkter Funktionen  $f(x)$  auf der reellen Achse endlich kann es doch nötig werden, Näherungsfunktionen  $G(z)$  von beträchtlichem Wachstum heranzuziehen: Es wird die Möglichkeit festgestellt, Aufschlüsse aus den Werten der Ableitung von  $f(x)$  zu gewinnen. Wir geben den Satz wieder: Ist  $\mu(x) = \max_{|t| \leq x} |f'(t)|$

und  $\nu$  die Ordnung von  $\mu(x)$ , so kann  $|f(x) - G(x)| \leq \varepsilon$  auf der Achse stets realisiert werden durch ein  $G(z)$  von der Ordnung höchstens  $\nu + 1$ ; diese Schranke kann nicht allgemein erniedrigt werden. — III. Beste Näherung durch Polynome an eine Funktion auf beliebigen, aber beschränkten Kontinuen. Sei  $E$  jetzt wieder beschränkte, abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge — speziell eine Strecke — während das Komplement ein Gebiet um  $\infty$  sein mag. Für  $f(z) \in A(E)$  sei  $\varrho_n(f, E) = \inf_{z \in E} \max |f(z) - P_n(z)|$ ,  $\inf$  bezogen auf alle Polynome höchstens

$n$ -ten Grades. Das Verhalten dieser Approximationsgüte bei  $n \rightarrow \infty$  in Abhängigkeit von  $f$  und  $E$  ist erst für Strecken, später auch für allgemeinere Mengen  $E$  untersucht worden: Dabei laufen Kennzeichnung von  $f(x)$  durch Differentiations- bzw. Lipschitzeigenschaften einerseits, Nullstrebeordnung von  $\varrho_n(f, E)$  andererseits parallel. Verf. verfolgt die an Strecken, bzw. Bereichen bemerkten Zusammenhänge weiter und dehnt sie aus zu einer Reihe sehr charakteristischer Aussagen zur Theorie der besten Approximation auf beliebigen Kontinuen obiger Art.  $\varrho_n(f, E)$  wird geschätzt für den Fall:  $f(z)$  analytisch in einem Gebiet, das  $E$  einschließt — es nimmt ab wie  $q^n$ , wobei  $q$  um so kleiner ist, je weiter das Gebiet über  $E$  hinausgreift. Für  $f(z) \in A(E)$  folgen allgemeine Schlüsse für die Schätzung von  $\varrho_n$  auf beliebigen Kontinuen, und Anwendungen für mehrere speziellere Mengenklassen. Endlich wird das Problem der Klassifikation stetiger Funktionen gerade auf Grund der Eigenschaften der besten Approximation, ausgedrückt durch  $\varrho_n$ , behandelt. *E. Ullrich.*

**Achiezer, N. I.:** Über ganze transzendente Funktionen endlichen Grades, die eine Majorante auf einer Folge von reellen Punkten besitzen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **16**, 353—364 (1952) [Russisch].

Eine bemerkenswerte Fortführung einer Aussage von Miss Cartwright über ganze Funktionen  $g(z)$  der Ordnung 1 (dies. Zbl. **13**, 358). Wir formulieren für Tragflächen. Cartwright zeigte: Verfolgt man den Verlauf einer solchen Fläche über einer Geraden der  $z$ -Ebene, etwa der reellen Achse  $z = x$ , und passiert die darüber gelegene Kurve  $K(x): (x, |g(x)|)$  schon genügend viele Punkte, wo  $|g(x)| \leq 1$  bleibt, so ist  $K$  ganz unter einer festen Höhe,  $|g(x)| \leq C$ ; die analytische Landschaft zeigt einen „Graben“; Cartwright setzt dabei den Typus  $\sigma < \pi$  voraus und  $x_n = \pm \pi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; in der Aussage steckt eine Verallgemeinerung dessen, was man an  $\cos \pi z$  beobachtet. — Achiezer verallgemeinert wie folgt: In der Voraussetzung wird eine Majorantenfunktion  $\omega(z)$  vom Geschlecht 0 (also Konvergenzklasse, Minimaltyp der Ordnung 1 höchstens) an Stelle der Konstanten 1 gesetzt; auf  $z = x$  sei immer  $|\omega(x)| \geq 1$ , während die Nullstellen von  $\omega(z)$ ,  $\alpha_n + i\beta_n$ , sich genügend rasch von der reellen Achse entfernen, so daß  $\sum |\beta_n|^{-1}$  konvergiert. Zu jedem solchen  $\omega(z)$  und jedem  $p > 0$  kann man dann eine passende reelle Knotenfolge  $x_n$  (Folge von Vergleichspunkten) und eine zweite Majorantenfunktion  $\theta(z)$ , wieder ganz transzendent und vom Typus  $p$ , konstruieren, derart, daß für jede ganze Funktion  $g(z)$  von der Ordnung 1, Typus  $\sigma < p$ , aus

$$|g(x_n)| \leq |\omega(x_n)| \quad \text{schon} \quad |g(x)| \leq C |\theta(x)|$$

folgt. Hier ist noch eine Konstante  $C$  offen gehalten, von der festgestellt wird, daß sie nur abhängt von  $\sigma, p$  und  $\omega(z)$ . — Dazu ein ähnlicher, etwas schärferer Satz.

*E. Ullrich.*

**Achiezer, N. I.:** Über ganze Funktionen endlichen Grades, die am wenigsten von Null abweichen. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **31 (73)**, 415—438 (1952) [Russisch].

Tschebyscheff hat bekanntlich die Polynome festgestellt, die über einer gegebenen Punktmenge der  $z$ -Ebene (z. B. Intervall) möglichst wenig von Null abweichen; und S. Bernstein hat dieses Problem auf ganze Funktionen übertragen, wobei es sich um die kleinste Abweichung über der reellen Achse insgesamt handeln soll; er hat eine Reihe besonderer Aufgaben dieser Art gelöst. Achiezer führt hier diese Untersuchungen unter zusammenfassenden Gesichtspunkten fort, und sucht die Funktionen  $F(z)$  kleinster Abweichung  $L_F = \sup_{-\infty < x < +\infty} |F(x)|$  von Null

innerhalb der Klasse  $K$  (bzw.  $K_R$  bei Reellwertigkeit für  $z = x$ ), die umrissen ist durch  $f(z) = Q(z) + P(z)g(z)$ , wo  $P$  und  $Q$  gegebene Polynome von den Graden  $n$ ,  $n-1$  sind, während  $g(z)$  alle ganzen Funktionen der Ordnung 1 und vom Typus kleiner gleich  $p$  durchläuft (die Russen sprechen da von Ganzen Funktionen des Grades  $p$ ).  $Q$  dient einer Anfangsnormierung,  $P$  heißt bestimmendes Polynom. Sonderfälle führen von hier auf das klassische Carathéodory-Féjersche Koeffizientenproblem



bzw. an das Pick-Nevanlinnasche Interpolationsproblem. — Es handelt sich also darum, Funktionen dieser Klasse durch die Forderung zu kennzeichnen, daß sie über einer festen Geraden ( $x$ -Achse) eine Betragfläche mit möglichst tiefem Graben haben sollen. Für jede Funktion heißt  $L_f$  (wie oben) die Abweichung, Punkte  $x_j$  mit  $f(x_j) = L_f$  Abweichungspunkte; die Menge aller (reellen) Abweichungspunkte  $\dots < x_j < x_{j+1} < \dots$  Tschebyscheffmenge. Das wird man etwa am  $\cos z$  klar vor sich sehen. — Diese Menge wird verglichen mit der Nullstellenmenge  $A = \{\lambda_j\}$  gewisser ganzer Funktionen  $\Omega(z)$  vom Grade  $p$ :  $A$  gehöre zur Klasse  $T(p, m)$ , ( $p > 0$ ,  $m \leq 0$ ), wenn es positive  $\delta, C, D$  gibt, so daß im Winkelraum  $|\arg z \pm \frac{1}{2}\pi| < \delta$  die Betragfläche von  $\Omega(z)$  sehr rasch ansteigt, genauer  $|\Omega(z)| > C|z|^{-m} \exp p|\Im z|$ , und weiter die  $\lambda_j$  einfache Nullstellen mit nicht zu flachen Tangentenkegeln in der Betragfläche sind:  $|\Omega'(\lambda_j)| > D(1 + |\lambda_j|)^{-m}$ . — Ähnlich wird die Klasse  $T^*(p, m)$  durch die einzige Forderung erklärt:  $0 < \lim |\Omega(iy)| \cdot |y|^m e^{-p|x|} < \infty$ . — Zwei Sätze übertragen dann klassische Aussagen von Tschebyscheff und de la Vallée-Poussin: I. Sei  $P(z)$  vom Grade  $n = 2l + 2$ , während  $F(z) \in K_R$  den Wert  $L_F$  mit alternierenden Zeichen auf einer Folge  $A \in T(p, 2l)$  annimmt. Wenn dann noch  $|Q(z)|$  in den reellen Nullstellen von  $P(x)$  ungleich  $L_F$  bleibt, ist  $F(z)$  einzige Extremalfunktion der Klasse. Beweis durch ein Interpolationsverfahren. II.  $P$  wie oben,  $F(z) \in K_R$  nehme auf einer Folge  $A \in T(p, 2l)$  Werte alternierender Zeichen an:  $(-1)^j M_j$ ,  $M_j > 0$ , ( $j = 0, \pm 1, \dots$ ); dann gibt es in  $K$  keine Funktion mit einer Abweichung  $< \inf_j M_j$ . — Es kann aber mehrere Extremalfunktionen geben, wie durch Beispiele belegt wird. — III. Der dritte Satz betrifft den Nachweis, daß eine Funktion  $F(z)$  nicht die kleinste Abweichung von 0 in der Klasse zeigen kann. Dies tritt ein unter der Voraussetzung, daß wieder  $P$  vom Grade  $2l + 2$ ,  $F \in K_R$  mit Tschebyscheffmenge in  $T^*(p, 2h)$ , wo das natürliche  $h \rightarrow l + 1$ , und  $|Q(z)| \neq L_F$  in reellen Nullstellen von  $P(x)$ . — Im Anschluß an diese allgemeinen Aussagen werden einerseits ältere Sonderfälle, insbesondere von Bernstein behandelte Aussagen, eingeordnet, und in einigen neuen Fällen recht eindrucksvolles Material beigebracht, das im wesentlichen aus dem Bewiesenen fließt. Es bezieht sich auf die durch  $P(z) = z^4$  und  $Q(z) = a_0 + \frac{a_2}{2!} z^2$  bzw.  $Q(z) = a_1 + \frac{a_3}{3!} z^3$  definierten Funktionenklassen. Die volle Behandlung erfordert sorgfältige Unterscheidung mehrerer Fälle, je nach der Lage der Koeffizienten  $a$  zum Grade  $p$  der ganzen Funktionen: Elliptische Funktionen erscheinen als sachgemäße Hilfsmittel.

E. Ullrich.

Iwata, Giiti: Orthogonal functions in the complex domain. Progress theor. Phys. 7, 333—344 (1952).

Sinclair, Annette: Generalization of Runge's theorem to approximation by analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 72, 148—184 (1952).

The main theorem of this paper is based on some definitions given below. A point which is a limit point of some set of points chosen one from each component of a given set  $S$ , is called a sequential limit point of  $S$  (s. l. point) (P. W. Ketchum, see this Zbl. 25, 167). A set  $S$  whose components are closed and whose s. l. points are in the complement  $C(S)$  of  $S$  is called „Q-set“. A set consisting of (i) the set  $B$  of the s. l. points of the given set  $S$  and (ii) precisely one point of each component  $J_k(S)$  of  $C(S)$ , such that  $J_k(S) \cap B = \emptyset$ , is called „B\*(S)-set“. The main theorem of this paper is the following: If the given set  $S$  is a Q-set, B\* any B\*(S)-set and  $f(z)$  is any analytic function on  $S$ , then for any sequence  $\{\delta_i\}$  of positive constants there exists a function  $g(z)$  analytic in  $C(B^*)$  and meromorphic in  $C(B)$  such that for every  $i$   $|f(z) - g(z)| < \delta_i$ , when  $z$  is any point of the component  $S_i$ . The author gives several theorems of this type and in particular an extension of the Weierstraß factor-theorem and Mittag-Leffler partial-fractions theorem.

J. Górski.

Leont'ev, A. F.: Über die Vollständigkeit eines Systems analytischer Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 381—414 (1952) [Russisch].

Verf. hatte schon früher Folgen von Linearverbindungen der Form  $P_n(z) =$

$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu\nu} f(\lambda_\nu z)$  studiert, wo  $a_{\nu\nu}$  Konstanten, die  $\lambda_\nu$  gewisse komplexe Zahlen (Folgen) bedeuten,  $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$  aber eine feste ganze Funktion von endlicher Ordnung  $\varrho$  und vom Typus  $0 < \sigma < \infty$ , mit nicht verschwindenden Taylorkoeffizienten  $a_n$  (Reihen von Dirichletschen Polynomen und ihre Verallgemeinerungen, dies. Zbl. 45, 351). Bei geeigneten Anforderungen an die  $\lambda_n$  und an die Funktion  $f(z)$ , nämlich für  $n \rightarrow \infty$

$$\lim n |\lambda_n|^{-\varrho} = \tau < \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim n^{1/\varrho} \sqrt[\varrho]{|a_n|} = (\sigma e \varrho)^{1/\varrho} > 0, \quad \sigma \leq \sigma,$$

konnte aus gleichmäßiger Konvergenz der Folge  $P_n(z)$  innerhalb  $|z| < R$ , bei  $R > q = \{\pi \tau / \sigma \sin(\pi \varrho / m)\}^{1/\varrho}$ ,  $m$  beliebig ganz  $> \varrho$ , eine Reihe von bemerkenswerten Folgerungen gezogen werden: 1. Es existieren alle  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\nu\nu} = \alpha_\nu$ . 2. Sind alle  $\alpha_\nu = 0$ , so ist  $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) \equiv 0$ , und umgekehrt. 3.  $F(z)$  kann nicht eine beliebige analytische Funktion in  $|z| < R$  sein; insbesondere war  $F(z) \equiv f(\lambda z)$  für  $\lambda \neq \lambda_\nu$  ausgeschlossen.  $R > q$  war dort hinreichend, um aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $\{P_n(z)\}$  auf diese Eigenschaften zu schließen. — Jetzt wird nach dem genauen Radius  $|z| > R_0$  gefragt, der diese Schlüsse erlaubt — jedenfalls muß er größer sein als der Vollständigkeitsradius  $R_1$  des Systems  $f(\lambda_\nu z)$  — und nach einigen damit zusammenhängenden Gegenständen. Es zeigt sich, daß obiger Schluß auf 1. 2. 3. von  $R > q_0 > R_1$  abhängt, daß  $q_0$  in gewissen Fällen mit  $q$  (wie oben) zusammenfällt (dann wird die oben hinreichende Bedingung eine notwendige);  $q_0$  hängt dann wesentlich von Wachstumseigenschaften der Taylorkoeffizienten  $a_n$  ab, wie sie durch  $\sigma$  charakterisiert sind. — Des weiteren wird die Bedeutung des  $\sigma$  für den Vollständigkeitsradius  $R_1$  von Systemen der Form  $f(\lambda_\nu z)$  herausgeschält; während nach früher vorliegenden Untersuchungen  $R_1$  abhängig zu sein schien von der Dichte  $\tau$  der  $\{\lambda_\nu\}$ , von Ordnung  $\varrho$  und Typus  $\sigma$  von  $f(z)$ , erweist sich jetzt, daß  $\sigma$ , als Charakterisierung des asymptotischen Verhaltens der Taylorkoeffizienten  $a_n$  von  $f(z)$  über  $\sigma$  hinaus Einfluß auf  $R_1$  hat. U. a. ist so in gewissen Fällen sogar  $R_1 = q$  realisierbar. Dazu mehrere Einzelaussagen. E. Ullrich.

Boas jr., R. P.: Integrability along a line for a class of entire functions. Trans. Amer. math. Soc. 73, 191—197 (1952).

The paper is devoted to a proof of the following theorem: Let  $f(z)$  be an entire function of exponential type such that  $\limsup y^{-1} \log |f(iy)f(-iy)| = 2c < 2\pi$ . Let  $\{\lambda_n\}$  be a sequence of complex numbers, with  $\lambda_0 = 0$ ,  $|\lambda_n - n| \leq L$ ,  $|\lambda_{n+m} - \lambda_n| > 2\delta > 0$  ( $m \neq 0$ ). Let  $\beta(x)$  be a non-decreasing function such that  $|\beta(x+L) - \beta(x-L)| \leq b$  and (if  $L < 1$ )  $|\beta(x+\frac{1}{2}) - \beta(x-\frac{1}{2})| \leq b$ . Let  $\Phi(x)$  be either (i) an increasing convex non-negative function or (ii) an increasing non-negative function such that  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(\infty) = \infty$ ,  $\Phi(x)/x$  decreases, and  $\Phi(xy) \leq \Phi(x)\Phi(y)$ . If  $\sum_{-\infty}^\infty \Phi(|f(\lambda_n)|)$  converges, then there exist numbers  $H$  and  $K$  depending only on  $c$ ,  $L$ ,  $b$ ,  $\delta$  and  $\Phi$ , such that

$$\int_{-\infty}^\infty \Phi(H|f(x)|) d\beta(x) \leq K \sum_{-\infty}^\infty \Phi(|f(\lambda_n)|).$$

In case (i)  $K \leq b$  and in case (ii),  $H \geq 1$ . — In the above theorem,  $\Phi(t) = t^p$ ,  $p > 0$  is a suitable choice; when  $p = 2$ , the result has been recently proved by Duffin and Schaeffer with  $\beta(x) = x$  (cf. this. Zbl. 49, 324). Another suitable choice of  $\Phi$  is  $\Phi(x) = e^{-1/x}$  near  $x = 0$ .

V. Ganapathy Iyer.

Zmorovič, V. A.: Über einige Variationsprobleme der Theorie der schlichten Funktionen. Ukrain. mat. Žurn. 4, 276—298 (1952) [Russisch].

Verf. hatte einige Strukturformeln für die Darstellung schlichter Abbildungen  $f(z) = z + \dots$  des Einheitskreises gewonnen, welche diese, bzw. gewisse Unterklassen (wie konvexe, sternige, spiralförmige, u. a.) durch i. a. nichtlineare Funktionale  $\Phi(z, \mu(\theta))$  auszudrücken erlaubten: Die



$\mu(\theta)$  spielen dabei die Rolle von Belegungen in Stieltjesintegralen; sie durchlaufen die Klasse  $M$  der über  $[-\pi, \pi]$  nicht abnehmenden und beschränkten Funktionen, zu den Rändern hin normiert  $\mu(-\pi - 0) = 0$ ,  $\mu(\pi) = 2\pi$ . (Die ausführliche Arbeit darüber ist schwer zugänglich erschienen in: *Nauk. Zapiski Kijvsk. derž. ped. Inst.* 6, Nr. 3 (1948) [Ukrainisch]). Wir verweisen auf analoge Ergebnisse für den Fall des Kreisrings, von wo aus man sich ein Bild machen kann. Vgl. unser Ref. in dies. Zbl. 53, 48.] — Die vorliegende Arbeit zielt auf Anwendungen solcher Strukturformeln in folgender Richtung: Hat man irgendein Funktional  $J(f(z))$  zu einer Klasse obiger Abbildungen, dessen Extrema man sucht, so kann man wegen  $f(z) = \Phi(z, \mu(\theta))$  bei festgehaltenen  $z$ , aber in der Klasse variablen  $f(z)$ , von da übergehen zu einem Funktional  $J_1(\mu(\theta))$ , und an diesem die Extremumsaufgabe angreifen. Doch versagen dabei die klassischen Methoden der Variationsrechnung, weil die zugrunde liegenden Funktionen  $\mu(\theta) \in M$  als allgemeine monotone, beschränkte Funktionen erklärt und daher sprunghaft unstetig sind (bzw. sein können). Verf. entwickelt deshalb zunächst direkte Methoden, um den Extrema von  $J$ , beizukommen; das gelingt in recht interessanter Weise, wobei sich zeigt, daß gerade die Sprungstellen der  $\mu(\theta)$  und die nur sprunghaft wachsenden  $\mu(\theta)$  für die Extrema wesentlich sind. — Der Hauptteil (dem Umfange nach) gilt dann einigen Anwendungen des Verfahrens: Er untersucht die Krümmung des Bildes von  $|z| = r < 1$  bei konvexen, sowie bei  $s$ -fach symmetrischen konvexen (und schlichten) Abbildungen; es ergeben sich zweiseitige Ungleichungen, die sich als scharf erweisen; das Verfahren gestattet, die Extremalfunktionen anzugeben. Analoges für schlichte und konvexe Abbildung von  $|z| = r > 1$  bei  $\infty \leftrightarrow \infty$ . Endlich werden die Klasse der schlichten Abbildungen mit beschränkter Drehung behandelt und dabei wieder scharfe Ungleichungen und damit die Extrema der Funktionale  $\arg f'(z)$  und  $|f'(z)|$  auf  $|z| = r < 1$  bestimmt. Um die Sache zu beleuchten, geben wir hierfür die Strukturformel wieder: Die Funktionen der Klasse gestatten die Darstellung:

$$f(z) = z - \frac{1}{\pi} e^{ix} \cos \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \langle z + e^{i\theta} \log(1 - z e^{-i\theta}) \rangle d\mu(\theta), \text{ wo } |\alpha| < \frac{\pi}{2}, \mu(\theta) \in M.$$

Nur die Funktion  $f_0(z) = z - 2e^{ix} \cos \alpha [z + e^{i\theta} \log(1 - z e^{-i\theta})]$  bei  $|\theta| \leq \pi$  verwirklicht die Extrema beider Funktionale auf jedem Kreise  $r$ . — Dieselbe Extremalaufgabe läßt sich vollständig lösen bei einer mittels konvexer Hilfsfunktionen aufgebauten Klasse regulär schlichter Abbildungen des Einheitskreises.

E. Ullrich.

**Goluzin, G. M.:** Über untergeordnete schlichte Funktionen. *Trudy mat. Inst. Steklov.* Nr. 38, 68—71 (1951) [Russisch].

Mit Hilfe der Löwnerschen Methode beweist Verf. folgenden Satz: Die Funktionen  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$ ,  $f_1(0) = f_2(0)$  seien regulär und schlicht im Kreise  $|z| < 1$ . Ist  $\arg f_1'(0) = \arg f_2'(0)$  und liegt bei der Abbildung  $w = f_1(z)$  das Bild  $B_1$  des Kreises  $|z| < 1$  im Innern des Bildes  $B_2$  von  $|z| < 1$  bei der Abbildung  $w = f_2(z)$ , so gilt im Kreise  $|z| < 3 - 2\sqrt{2}$ : (1)  $|f_1'(z)| \leq |f_2'(z)|$ . Das Gleichheitszeichen gilt nur bei  $f_1(z) \equiv f_2(z)$ . Für einen beliebigen außerhalb des Kreises  $|z| < 1$  liegenden Punkt, existieren Funktionen, für welche (1) nicht gilt. Verf. gibt ohne Beweis an, daß der Satz auch auf  $k$ -symmetrische schlichte Funktionen erweitert werden kann.

Der resp. Kreis ist dann:  $|z| < (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^{2/k}$ . L. Ilieff.

**Hersch, Joseph:** Longueurs extrémales, mesure harmonique et distance hyperbolique. *C. r. Acad. Sci., Paris* 235, 569—571 (1952).

Verf. gibt eine von der Ahlfors-Beurlingschen Definition (vgl. dies. Zbl. 41, 203) etwas abweichende Einführung der „extremalen Länge“ einer Kurvenschar. Er illustriert sie an mehreren geläufigen und wichtigen Konfigurationen, zeigt, daß sich dann die so erklärten extremalen Längen auf bekannte Funktionen (elliptische Integrale) zurückführen lassen und gibt schließlich Beziehungen an, die bekannte Aussagen der Theorie vom harmonischen Maß und dem hyperbolischen Abstand enthalten und verschärfen. Beweise fehlen noch. Ein ausführliches Referat folgt beim Vorliegen der vollständigen Arbeit.

E. Ullrich.

**Renggli, Heinz:** Un théorème de représentation conforme. *C. r. Acad. Sci., Paris* 235, 1593—1595 (1952).

Es wird eine Einzigkeitsaussage für Extremale Metrik gegeben (im Anschluß an Ahlfors-Beurling, dies. Zbl. 41, 203) und dann gezeigt, daß bei konformer Abbildung auf ein Rechteck der Abbildungsmodul im allgemeinen sinkt, ausgenommen bei gewissen Normalgebieten, die mittels Extremallängen erfaßt werden.

E. Ullrich.

Vekua, N. P.: Über ein Randwertproblem der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen für mehrere unbekannte Funktionen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **16**, 157—180 (1952) [Russisch].

Die geschlossene glatte Kurve  $L$  zerlege die Ebene in die Gebiete  $D^+$  (um  $O$ ) und  $D^-$ ; die Tangente an  $L$  drehe sich beim Umlauf unter einer Hölderbedingung ( $H$ ). Es sei  $\alpha(t)$  eine Funktion mit  $\alpha'(t) \neq 0$  auf  $L$ , die  $L$  unter Umkehrung der Richtung auf sich abbildet,  $\beta(t)$  ihre Umkehrung. Eine Funktion  $\varphi^+(z)$  heiße meromorph in  $D^+$ , wenn sie darin bis auf endlich viele Pole regulär ist und stetig bis auf  $L$  fortsetzbar ist;  $\varphi^+(t)$  seien dann die entsprechenden Randwerte. Alle Funktionen  $g_\nu(t)$ ,  $G_{\nu\nu}(t)$  seien auf  $L$  unter Hölderbedingung gegeben. Wir bilden Vektoren  $g$  aus  $g_\nu(t)$ ,  $v$  aus  $\varphi_\nu$  und eine quadratische Matrix  $\mathfrak{G}$  aus  $G_{\nu\nu}$ , mit  $\det \mathfrak{G} \neq 0$  auf  $L$ , und suchen die Lösung des Gleichungssystems

$$v_1^+ [\alpha(t)] = \mathfrak{G}(t) v_2^+(t) + g(t) \text{ auf } L.$$

Das Problem wird unter Verallgemeinerung einer Methode von Plemelj [Monatsh. Math. Phys. **19**, 211—245 (1908)] und unter Benutzung von Ergebnissen von Kveselava gelöst [dies. Zbl. **29**, 35; ausgeführt in Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **16**, 39—80 (1948)]. Der Sonderfall  $v_2 \equiv v_1$  umfaßt ein Randwertproblem von Carleman (dies. Zbl. **6**, 400), für  $n = 1$ , spezielles  $\alpha(t)$ , homogener Fall; die Carlemansche Aufgabe wird auch in Richtung auf unstetige Koeffizientenfunktionen verallgemeinert.

E. Ullrich.

Krikunov, Ju. M.: Über die Lösung des verallgemeinerten Riemannschen Randwertproblems und einer linearen singulären Integrodifferentialgleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **85**, 269—272 (1952) [Russisch].

Es handelt sich um folgenden Typus von Integro-Differentialgleichungen:

$$\sum_{\mu=0}^m \left[ a_\mu(t) \varphi_+^{(\mu)}(t) + \int_L A_\mu(t, t_1) \varphi_+^{(\mu)}(t_1) dt_1 \right] + \\ + \sum_{\nu=0}^n \left[ b_\nu(t) \varphi_-^{(\nu)}(t) + \int_L B_\nu(t, t_1) \varphi_-^{(\nu)}(t_1) dt_1 \right] = f(t).$$

Dabei ist  $L$  eine einfache, glatte, geschlossene Kontur, die 0 einschließt; die  $a, b, f, g$  sowie  $A, B, K$  sind gegebene Funktionen auf  $L$ , jene mit Hölderbedingung;  $\varphi_+(z)$ ,  $\varphi_-(z)$  werden im Innern bzw. Äußeren von  $L$  als holomorphe Funktionen gesucht; sie werden durch obige Gleichung als Randbedingung gekennzeichnet; die Ableitungen bis zur Ordnung  $m, n$  werden als vorhanden angenommen. — Zur Lösung wird eine Integraldarstellung entwickelt, welche aus einer Formel von Sochockij gewonnen wird, indem die Darstellungen der höchsten Ableitungen durch Cauchy-Integrale  $m$ -, bzw.  $n$ -mal integriert werden. Das erlaubt, die Integro-Differentialgleichung in eine Integralgleichung überzuführen, von einem Typus, den zuerst 1943 Magnaradze behandelt hatte

$$\frac{1}{2} \left[ a_m(t) + \frac{b_n(t)}{t^n} \right] \mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \left[ a_m(t) - \frac{b_n(t)}{t^n} \right] \int_L \frac{\mu(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_L K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = g(t);$$

doch fehlte dort der Zugang zur expliziten Lösung, wie er hier eröffnet ist [vgl. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoje SSR **4**, Nr. 2 (1943); sowie N. T. Muschelišvili, Sing. Integralgleichungen, 2. Ausg. Moskau-Leningrad 1946 (Russisch) oder Groningen-Holland 1953 (Englisch), dies. Zbl. **51**, 332].

E. Ullrich.

Lewy, Hans: Asymptotic development at the confluence of boundary conditions. Construct. Appl. conformal maps, 255—256 (1952).

Let be  $z = x + iy$ ,  $\zeta = u + iv$  and  $\zeta(z)$  the conformal mapping of the half plane  $y > 0$  on the  $\zeta$ -plane in such a way, that the negative half-axis  $x < 0$  goes into the negative half-axis  $u < 0$ ,  $z = 0$  into  $\zeta = 0$ , and the positive real axis  $x > 0$  into an analytic curve  $v = v^2 f(u)$ ,  $f(u) > 0$  for  $u > 0$ . It is shown that the function  $\zeta(z)$  and its derivative  $\zeta'(z)$  can be represented near  $z = 0$  by an asymptotic double series  $\sum_{m,n} A_{m,n} z^m (z \log z)^n$ . Further the author considers



a harmonic function  $u(x, y)$  which satisfies the linear boundary condition  $\partial u / \partial y = u$  for  $x > 0$  and  $\partial u / \partial y = 0$  for  $x < 0$ , being continuous in a neighborhood of the origin and regular in the upper half plane near the origin. If  $u(x, y) = \operatorname{Re}[\zeta(z)]$ ,  $\zeta(z)$  can be represented near  $z = 0$  by an asymptotic double series. J. Górski.

**Garrick, I. E.:** Conformal mapping in aerodynamics, with emphasis on the method of successive conjugates. Construct. Appl. conformal maps, 137—147 (1952).

The Theodorsen-Garrick method applied to wing sections consists of two parts (i) transformation of a given wing-section profile into a near circle and (ii) transformation of near circle into a circle. To obtain a transformation (ii) the author solves an integral equation by method of successive approximations of conjugate functions. Numerical evaluations and many applications as to integral equations with singular kernels conformal mapping of biplane wing sections and others are given. J. Górski.

**Ostrowski, A. M.:** On the convergence of Theodorsen's and Garrick's method of conformal mappings. Construct. Appl. conformal maps, 149—163 (1952).

In the method of Theodorsen-Garrick an integral equation is solved by successive approximations, but no proof of the convergence and estimate of accuracy of the approximations is given. S. E. Warschawski gave this proof and estimates but he choosed a special initial value. The author considers a generalization of Theodorsen-Garrick integral equation, proves the existence and uniqueness of the solution and gives sufficient conditions for convergence of approximations of derivatives up to the given order. J. Górski.

**Ostrowski, A. M.:** On a discontinuous analogue of Theodorsen's and Garrick's method. Construct. Appl. conformal maps, 165—174 (1952).

This paper can be regarded as a continuation of the previous one. The integral equation considered in the preceding paper is solved by method of successive approximations. The computation of the singular integral occuring in these equations is very difficult and therefore the author replaces the integral by a sum and proves that under the same hypotheses as for the original integral equations the method of successive approximations converges. The discussion of the approximation errors is given. J. Górski.

**Swinford, Lee H.:** An approximate method for conformal mapping. Construct. Appl. conformal maps, 225 (1952).

A. Ostrowski [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **38**, 168—182 (1929)] has shown that the convergence of the Carathéodory's-Koebe's method of constructing the successive approximations of the mapping function is only of the order  $O(1/n)$ . The author gives a modification of this method and shows that  $1 - \varrho_n = O(1/n)$ , where  $\varrho_n$  is the radius of the largest circle with center at the origin in the  $n$ -th successive map of the given domain. J. Górski.

**Stein, G. M.:** Conformal maps of electric and magnetic fields in transformers and similar apparatus. Construct. Appl. conformal maps, 31—57 (1953).

The problems connected with electric and magnetic fields in transformers of various types are considered. A description of methods and necessary formula are given. J. Górski.

**Weber, Ernst:** Conformal mapping applied to electromagnetic field problems. Construct. Appl. conformal maps, 59—69 (1952).

The author considers three problems connected with electromagnetic fields: (i) the two dimensional problem of determination of the scalar potential between two arbitrary shaped conductor surfaces. In some cases the Schwarz-Christoffel formula for the mapping of upper half plane into a region bounded by straight lines can be applied. In the case of a sharp corner the field vector as the negative gradient of the potential functions becomes infinite, what cannot have practical significance. But a slight change of a shape (rounding of a corner) reduces the field vector to finite values and therefore the author replaces a factor  $(w - w_*)^{\beta\nu - 1}$  in the Schwarz-Christoffel formula by  $(w - p)^{\beta\nu - 1} + \lambda (w - q)^{\beta\nu - 1}$  where  $p, q, \lambda$  are reals constants. (ii) Certain two dimensional Poisson potential problems are considered e. g. electron flow in vacuum tubes, the evaluation of magnetic fields within long conductors. (iii) The problem of propagation of electromagnetic waves through metallic tubes is reduced on equivalent static problem solved by means of conformal mapping. Such reduction is possible if the electromagnetic field can be expressed in terms of scalar two dimensional wave function and if the boundary conditions can take the form of an homogeneous integral equation. J. Górski.

**Sokolnikoff, I. S.:** On the use of conformal mapping in two-dimensional problems of the theory of elasticity. Construct. Appl. conformal maps 71—77 (1952).

This paper indicates some of the uses of conformal maps in the solution of a wide class of two dimensional boundary value problems of the theory of elasticity. The author considers two problems: What is the state of stress and deformation in the region when the boundary is sub-

jected (i) to the action of prescribed forces and (ii) the points of the boundary are subjected to prescribed displacements. The stress function  $u(x, y)$  satisfies the biharmonic equation in the isotropic case. The general solution of this equation can be expressed in terms of two analytic functions  $\varphi(z), \psi(z)$ . For the determination of these functions we have two functional equations. If the region is the circle  $|z| \leq 1$  these functions  $\varphi(z), \psi(z)$  can be found by means of determination of their unknown coefficients for Fourier series. The general case can be reduced to the previous one by conformal mapping of the given region to the unit circle. Another method to find  $\varphi(z), \psi(z)$  is the solution of certain integral equations. The case of an anisotropic medium is also considered.

*J. Górski.*

**Vazsonyi, Andrew:** Fluid dynamics, conformal mapping, and numerical methods. Construct. Appl. conformal maps 85—86 (1952).

Several problems of perfect fluid theory can be solved by application of conformal mapping, but this method is connected with some numerical difficulties. To avoid these, the simplification of boundaries can be accomplished by conformal mapping in such a way, that the complicated boundary goes into a straight line. The author illustrates this method by examples as a perfect fluid flow about arbitrary airfoils, compressible flow around airfoils or in channels.

*J. Górski.*

**Cooper, Eugene P.:** Use of conformal mapping in the study of flow phenomena at the free surface of an infinite sea. Construct. Appl. conformal maps, 87—89 (1952).

The author discusses some results connected with the problem of entry from air of large high speed solid bodies into water, e. g. the landing of sea planes. The problem can be solved with help of suitable conformal maps.

*J. Górski.*

**Bartels, R. C. F. and O. Laporte:** An application of conformal mapping to problems in conical supersonic flows. Construct. Appl. conformal maps, 91—103 (1952).

The author considers the conical supersonic flow and representing the components of velocity in complex form solves the corresponding boundary value problem for the flow past a body by methods of analytic functions and conformal mapping. In particular the problem for the delta-wing is formulated as a boundary value problem for an annular region.

*J. Górski.*

**Young, David M.:** The use of conformal mapping to determine flows with free streamlines. Construct. Appl. conformal maps, 125—136 (1952).

The conformal mapping can be used to determine plan-flows with free streamlines. Several numerical difficulties connected with the computation of streamlines, lines of constant pressure and lines of constant velocity direction can be overcome with the aid of numerical and analytic methods given in this paper.

*J. Górski.*

**Mises, R. v.:** On network methods in conformal mapping and in related problems. Construct. Appl. conformal maps, 1—5 (1952).

The author gives expository remarks about the network methods which are often preferable, when we approximate the differential equation itself and the boundary conditions. The difficulties of network methods and some unsolved problems, as for example the accuracy of solution, the choice of the network, are mentioned.

*J. Górski.*

**Southwell, Sir Richard:** Relaxation method as ancillary techniques. Construct. Appl. conformal maps, 239—241 (1952).

This is an article of polemical character. The author gives some personal remarks about the possibility of the best use of computing machines in numerical problems.

*J. Górski.*

**Seidel, W.:** Bibliography of numerical methods in conformal mapping. Construct. Appl. conformal maps, 269—280 (1952).

The bibliography of methods for the effective numerical constructions of conformal maps of simply and multiply connected regions with short references to papers is given.

*J. Górski.*

● **Kober, H.:** Dictionary of conformal representations. New York: Dover Publications, Inc. 1952. XVI, 208 p. \$ 3.95.



This dictionary, which was written for the British Admiralty, appeared in five separate volumes during 1944-1948. It has now been collected into one handy volume and it should be of considerable help to those concerned with the use of conformal maps in various branches of applied mathematics. The conformal mappings described in the book are by and large arranged according to the analytic functions giving rise to them, the author having found that this permits a more systematic classification than an arrangement according to geometric properties of domains. Part I contains a detailed discussion of numerous special cases of the linear substitution. Part II, entitled „Algebraic functions, and  $z^\alpha$  for real  $\alpha$ “, discusses the rational function of second degree and some simple examples involving  $z^\alpha$ ; there are also some mappings by rational automorphic functions. Part III, devoted to  $e^z$ ,  $\log z$ , and related functions, exhibits a great number of conformal maps yielded by these functions and combinations of them with those considered in Parts I and II. Part IV begins with general remarks on the Schwarz-Christoffel formula (hardly deserving the heading „On the theory of the general S.-C. transformation“) and goes on to describe a large number of special cases of this formula which can be dealt with in terms of elementary functions. Section 12. 9 of Part IV, entitled (according to the Table of Contents) „A converse of the method“, is missing in the reviewer's copy. Part V exhibits many mappings effected by elliptic functions and also the simplest mappings associated with the elliptic modular function. In keeping with purely descriptive character of the book, no proofs are given. There are, however, references to the literature which may help the reader to find proofs for the statements made. The book includes an index (not quite appropriately called „Topological subject index“) listing the various geometric shapes whose conformal mappings are discussed. Another valuable feature are the numerous figures and diagrams. A very useful volume.

Z. Nehari (M. R. 14, 156).

Unkelbach, Helmut: Die konforme Abbildung echter Polygone. Math. Ann. 125, 82—118 (1952).

Unter einem Polygon versteht der Verf. ein einfach zusammenhängendes Gebiet auf einer die  $z$ -Ebene überlagernden Riemannsche Fläche, das keine Verzweigungspunkte besitzt und von endlich vielen „linearen Randstücken“ begrenzt wird. Das Polygon heißt „echt“, falls es den Punkt  $\infty$  höchstens endlich oft überdeckt. Es werden mittels einer der Schwarz-Christoffelschen Formel ähnlichen Formel diejenigen Funktionen explizit angegeben, welche die obere Halbebene konform auf ein echtes Polygon abbilden; sie enthalten gewisse unbestimmte Konstanten. Für verschiedene Spezialfälle werden Methoden für die Bestimmung dieser Konstanten angegeben.

C. Constantinescu.

Unkelbach, Helmut: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone. I. Math. Ann. 129, 391—414 (1955).

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (s. vorstehendes Referat). Ein Kreisbogenpolygon ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet auf einer die  $z$ -Ebene überlagernden Riemannsche Fläche, das keine Verzweigungspunkte enthält und dessen Rand aus endlich vielen isolierten Punkten und Kreisbögen besteht; dabei brauchen die Kreisbögen nicht schlicht zu sein. Die Funktion  $f(\zeta)$ , welche die obere Halbebene auf ein Kreisbogenpolygon abbildet, genügt, gerade wie im Falle eines schlichten Kreisbogenpolygons der Schwarzschen Differentialgleichung  $\{f(\zeta), \zeta\} = R(\zeta)$ , wo  $R(\zeta)$  eine rationale Funktion ist, deren sämtliche Koeffizienten und Pole reell sind.

C. Constantinescu.

Unkelbach, Helmut: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone. II. Math. Ann. 130, 327—336 (1955).

Der Verf. definiert die Winkel der Ecken eines verallgemeinerten Kreisbogenpolygons (siehe obiges Referat) und behandelt die Abhängigkeit von  $R(\zeta)$  von dem so definierten Winkeln.

C. Constantinescu.

**Stallmann, F.:** Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen; ein Beitrag zum Parameterproblem. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 240—241 (1952).

In dieser Arbeit wird der Grundgedanke eines Verfahrens für die Bestimmung der Parameter, welche in dem Problem der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen vorkommen, angegeben. Eine ausführliche Darstellung findet man in *Mitt. math. Sem. Gießen* **43** (1952; dies. Zbl. **47**, 80). *C. Constantinescu.*

**Habsch, Hans:** Die Theorie der Grundkurven und das Äquivalenzproblem bei der Darstellung Riemannscher Flächen. *Mitt. math. Sem. Gießen* **42**, 51 S. (1952).

Die Darstellung einer Riemannschen Fläche durch einen Streckenkomplex hängt davon ab, in welcher Weise die Fläche in Halbbblätter zerlegt wird. Dieser Umstand gibt Veranlassung zu der Frage, unter welchen Bedingungen zwei gegebene Streckenkomplexe dieselbe Fläche darstellen und, umgekehrt, wann zwei Flächen durch denselben Komplex beschrieben werden können (Äquivalenzproblem). Die Frage nach allen möglichen Darstellungen einer über  $q$  Grundpunkten verzweigten Fläche führt auf die Untersuchung aller topologisch verschiedenen Zerlegungen der Zahlenkugel durch eine Jordankurve („Grundkurve“), die durch  $q$  feste Punkte geht. In der vorliegenden Diss. wird gezeigt, daß eine besonders einfache Klasse von Kurvenänderungen (Übergängen von einer Grundkurve zu einer anderen), bei der die Kurven vor und nach der Änderung sich jeweils nur in zwei Teilbögen unterscheiden, ein vollständiges System von Erzeugenden der Gruppe aller Kurvenänderungen bildet, so daß die Untersuchung auf jene Klasse beschränkt werden kann. — Dann wendet sich Verf. den Riemannschen Flächen der Nevanlinnaschen  $\nu$ -Funktionen zu, die endlich viele nur logarithmische Windungspunkte aufweisen. Es wird zunächst gezeigt, daß gleiche zyklische Anordnung der den Windungspunkten entsprechenden Elementargebiete zweier Streckenkomplexe notwendig für ihre Äquivalenz ist. Für den Fall, daß über jedem Grundpunkt nur ein Windungspunkt liegt, wurde das Äquivalenzproblem bereits von E. Drape (dies. Zbl. **16**, 81) behandelt. Verf. untersucht nun diejenigen Flächen genauer, die über ein oder zwei Grundpunkten mehrere Windungspunkte besitzen, und stellt für diese Äquivalenzkriterien auf. Schließlich wird noch die Klasse der Flächen mit vier Grundpunkten und sechs Verzweigungspunkten diskutiert mit einer Methode, die prinzipiell auf beliebige Flächenklassen mit endlich vielen logarithmischen Windungspunkten anwendbar ist. *P. Seibert.*

**Volkovyskij, L. I.:** Zum Typenproblem einer gewissen einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche. *Ukrain. mat. Žurn.* **1**, Nr. 1, 39—48 (1949) [Russisch].

**Volkovyskij, L. I.:** Ein Beispiel einer Riemannschen Fläche vom hyperbolischen Typus. *Ukrain. mat. Žurn.* **1**, Nr. 3, 60—67 (1949) [Russisch].

Die Verheftungsmethode beim Typenproblem offener einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen  $F$  beruht auf folgendem Vorgehen:  $F$  wird erst in geeigneter Weise in Stücke zerschnitten, welche quasikonform in schlichte Gebiete abgebildet werden; deren Ränder werden identifiziert (entsprechend den Uferzuordnungen jener Schnitte); dann wird entweder eine geeignete nichteuklidische Metrik eingeführt — oder eine passende Ausschöpfung durch eine Kurvenschar konstruiert; dadurch wird es in vielen Fällen möglich, entweder ein Kriterium für den parabolischen — oder ein solches für den hyperbolischen Fall zum Tragen zu bringen und eine Entscheidung über den Typus von  $F$  herbeizuführen. — Die erste Note, die in nahem Zusammenhang mit der Doktorarbeit des Verf. steht [*Trudy mat. Inst. Steklov* **34** (1950)], behandelt eine Flächenklasse, bei der die erste Zerschneidung rasch zur Abbildung in unendlich viele Streifen führt; eine Anwendung des Typenkriteriums von Ahlfors erbringt dann eine hinreichende Bedingung für den Grenzpunktfall bei der untersuchten Flächenklasse. — Die zweite Arbeit gibt ein Beispiel einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche vom hyperbolischen Typus mit nur zwei logarithmischen Windungspunkten (über 0, 1) und unendlich vielen algebraischen (über  $\infty$ ). Bemerkenswert erscheint die schwache Verzweigkeit im Endlichen. Der Beweis für die Typenaussage ruht auf der Lösung eines Verheftungsaufgabe für unbegrenzt viele Streifen und eine Halbebene. *E. Ullrich.*

**\*Ozaki, Shigeo, Isao Ono and Mitsuru Ozawa:** On the pseudo-meromorphic mappings on Riemann surfaces. *Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A* **4**, 211—213 (1952).

**\*Ozaki, Shigeo and Isao Ono:** Second principal theorem of pseudo-meromorphic functions. *Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A* **4**, 214—221 (1952).

**Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi:** On the function-theoretic identities of continuous mappings. *Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A* **4**, 238—242 (1952).

Let  $w = f(z) \equiv u(x, y) + i v(x, y)$  be single-valued and of class  $C'$  in the



domain  $D_z$  punctured at the points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ , where  $f(z)$  has poles. The authors define a counting function  $n(D_z, w)$  and give a proof of the following result. Theorem:  $n(D_z, w)$  is invariant if  $w$  varies along a continuous curve that does not touch the image  $\Gamma_w$  of the boundary  $\Gamma_z$  of  $D_z$ ; when  $w$  crosses  $\Gamma_w$ , then the saltus of  $n(D_z, w)$  is an integer. From this result, the authors obtain generalizations of Green's Formula, the Ahlfors-Shimizu Theorem, and the Argument Principle, among other results. — The reviewer remarks that the hypotheses used are not clear. *M. O. Reade.*

**Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi:** On the function-theoretic identities on the continuous mapping in the three dimensional space. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 243—249 (1952).

In this note, the authors generalize certain results due to Ozaki, Ono and Ozawa [ibid. 4, 195—202 (1951)] to the case of quasi-meromorphic mappings from three space into three space. They obtain analogues of the Bieberbach Area Theorem, and the Ahlfors-Shimizu Theorem. The techniques used are reminiscent of those used in the paper noted above and of those used in another one due to the authors noted above (this Zbl. 53, 239). *M. O. Reade.*

**Bers, Lipman:** Some generalizations of conformal mapping suggested by gas dynamics. Construct. Appl. conformal maps, 117—124 (1952).

The author gives various generalizations of conformal mapping using the classical theory of two-dimensional subsonic gas flow. The generalized analytic functions are introduced and some results concerning the set of isolated singularities and the behaviour of these functions in the neighbourhood of an isolated singularity are mentioned. The application to the mapping problem related with the flow in jets and channels in airfoil theory is given. *J. Górski.*

**Fort jr., M. K.:** Some properties of continuous functions. Amer. math. Monthly 59, 372—375 (1952).

Sind  $A$  der Einheitskreis und  $B$  eine Teilmenge der komplexen Ebene, ferner  $f$  eine stetige Abbildung von  $B$  in  $A$ , so hat  $f$  einen „stetigen Logarithmus“, wenn eine stetige reelle Funktion  $g$  existiert derart, daß  $f(z) = e^{ig(z)}$  für jeden Punkt  $z$  aus  $B$ . Mit Hilfe dieses Begriffes wird der Fundamentalsatz der Algebra auf den Brouwerschen Fixpunktsatz zurückgeführt. *J. Weier.*

**Moisil, Gr. C.:** Sur une formule de moyennes. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Ştii. Natur. 1, Nr. 1, 52—54, russ. und französ. Zusammenfassg. 54 (1952) [Rumänisch].

L'A. étudie une formule de moyenne de la théorie des fonctions monogènes d'une variable hypercomplexe, qu'il applique aux relations des tensions  $\sigma_x, \sigma_y, \tau$  de l'équilibre plan et qu'il étend directement au cas du liquide visqueux incompressible en mouvement plan permanent, lent. *A. Froda.*

**Iacovache, Maria:** L'application des fonctions monogènes au sens de Feodorov à la théorie de l'élasticité des corps à isotropie transverse. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Ştii. Natur. 1, Nr. 1, 58—60 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 60 (1952) [Rumänisch].

L'A. montre que les équations de l'équilibre plan des corps élastiques à isotropie transverse sont équivalentes à la condition de monogénéité de Feodoroff d'une certaine fonction d'une variable hypercomplexe. *I. Berstein.*

**Bremermann, Hans-Joachim:** Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen. Diss. math.-naturw. Fakultät Münster 2, 5 7 (1952).

Der Verf. stellt zunächst mehrere äquivalente Definitionen der Pseudokonvexität von schlichten Gebieten  $G$  des  $n$ -dimensionalen komplexen Zahlenraumes  $C^n$  zusammen, und zeigt dann, daß ein Hartogsscher Körper  $H = \{\zeta \in G, |w| < R(\zeta)\}$ ,  $G \subset C^n$ , dann und nur dann Holomorphie(- Regularitäts-)gebiet ist, wenn  $-\ln R(z)$  eine in  $G$  plurisubharmonische (= pseudokonvexe) Funktion und  $G$  ein Holomorphiegebiet ist. Für  $n = 1$  gilt dieser Satz sogar, wenn  $G$  eine beliebige Riemannsche Fläche ist. In diesem Falle ist  $G$  genau dann als Holomorphiegebiet anzusehen, wenn  $G$  nicht kompakt ist. Im letzten Teil der Arbeit werden Konstruktionsverfahren für die Holomorphiehüllen von Tuben- und Halbtubengebieten, sowie von Hartogsschen Körpern angegeben. *H. Grauert.*

**Rothstein, Wolfgang:** Über die Fortsetzung von Verteilungen meromorpher Ortsfunktionen im  $R_6$ . Math. Ann. 124, 303—308 (1952).

Am einmal punktierten Trizylinder des  $C^3 (= R_6)$  wurde zum ersten Male gezeigt, daß vorgegebene Cousinsche Verteilungen von holomorphen Ortsfunktionen (Verteilungen zweiter Art) aus gewissen Gebieten heraus immer fortsetzbar sein können. Nachdem für diese Fortsetzungen vom Verf. (dies. Zbl. 37, 183) Gesetze aufgestellt sind (ähnlich den bekannten für Funktionen), werden in der vorliegenden Arbeit analoge Gesetze für Cousinsche Verteilungen erster Art (Vorgabe von meromorphen Funktionen, die hinsichtlich der Subtraktion verträglich sein müssen) aufgestellt. Grundlegend dafür sind die Analoga 1. des Kontinuitätssatzes, 2. des Satzes: Ist  $P$  ein Punkt des Randes der Einheits-Hyperkugel  $\mathfrak{S}$  des  $C^3$ ,  $\mathfrak{R}$  das Äußere von  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{U}$  eine Umgebung von  $P$ ,  $f$  holomorph in  $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{R}$ , so ist  $f$  auch noch holomorph in  $P$ .  
H. Behnke.

**Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi:** Some properties in matrix space. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A 4, 230—237 (1952).

Die Matrix  $W = (w_{ij})$  wird analytische Funktion der Matrix  $Z = (z_{ij})$  genannt, wenn die  $w_{ij}$  analytische Funktionen aller Elemente  $z_{ij}$  von  $Z$  sind. Gehören  $W$  und  $Z$  zur Gesamtheit  $R$  aller komplexen quadratischen Matrizen vom Grad  $n$ , so heißt eine analytische Funktion  $W = W(Z)$  „einwertig“ in  $R$ , wenn für  $Z^{(1)} \neq Z^{(2)}$  auch  $W(Z^{(1)}) \neq W(Z^{(2)})$  gilt. Verf. geben zwei hinreichende Bedingungen dafür, daß  $W(Z)$  in einem konvexen Bereich von  $R$  einwertig ist. Als Spezialfall ergeben sich Sätze von Takahashi (dies. Zbl. 44, 308)).  
E. Trost.

**Hove, Léon van:** Topologie des espaces fonctionnels analytiques et des groupes infinis de transformations. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 333—351 (1952).

Verf. benutzt Methoden der Theorie der topologischen Vektorräume zur Untersuchung unendlicher kontinuierlicher Gruppen von analytischen Transformationen. Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge des Raumes  $C^n$  von  $n$  komplexen Veränderlichen und  $A_K$  die Algebra der in  $K$  analytischen (d. h. in einer Umgebung von  $K$  eindeutigen und in jedem Punkt von  $K$  in eine Taylorreihe entwickelbaren) Funktionen. In  $A_K$  wird eine Topologie  $t_K$  definiert, in ähnlicher Weise wie es von G. Köthe (dies. Zbl. 50, 335) für den Fall einer Variablen durchgeführt wurde, indem  $A_K$  als induktiver Limes (= lokalkonvexe Hülle) von Banachalgebren dargestellt wird. Bei  $t_K$  werden die algebraischen Operationen in  $A_K$  stetig, die Werte  $f(z)$  sind für  $f \in A_K$  und  $z \in K$  gleichzeitig stetig und  $A_K$  ist ein vollständiger Vektorraum. [Die vorstehenden Resultate wurden in einer anderen Note (dies. Zbl. 52, 87) ohne Beweise veröffentlicht].  $G_K$  sei die Gruppe aller analytisch umkehrbaren Abbildungen  $g$  von  $K$  auf sich ( $z'_i = g_i(z)$ ,  $z_j = g_j^{-1}(z')$ ,  $g_i \in A_K$ ,  $g_j^{-1} \in A_K$ ). Die Topologie von  $A_K$  wird dann benutzt, um auch in der Gruppe  $G_K$  eine topologische (und uniforme) Struktur zu definieren: Jeder Nullumgebung  $V$  in  $A_K$  und jedem  $g \in G_K$  entspricht eine Umgebung  $\tilde{V}(g) = \{h \in G_K; g_i - h_i \in V \text{ und } g_i^{-1} - h_i^{-1} \in V, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Bei dieser Topologie ist  $g \rightarrow g^{-1}$  eine stetige Abbildung, und es wird gezeigt, daß auch die Multiplikation in  $G_K$  eine stetige Operation ist und daß die Gruppe  $G_K$  vollständig ist. (Théorème IV). Verf. beweist dann durch Modifizierung einer Beweismethode von H. Cartan [Sur les groupes de transformations analytiques (dies. Zbl. 10, 395), S. 43—45 und 52—53], das folgende Théorème V: „Es gibt in  $G_K$  eine Umgebung der identischen Transformation  $e$ , die kein von  $e$  verschiedenes Element  $g$  mitsamt all seinen Potenzen  $g^n$  enthält“. Über die kompakte Menge  $K$  macht Verf. dabei die folgende Voraussetzung (H): Es gibt eine Zahl  $\zeta > 0$  und eine Teilmenge  $R \subset K$ , so daß 1. eine analytische Funktion auf  $K$  durch ihre Werte auf  $R$  vollständig bestimmt ist, 2. wenn  $z \in R$ ,  $z' \in K$  eine Entfernung  $d_{z,z'} \leq \zeta$  haben, eine rektifizierbare Kurve der Länge  $L_{z,z'}$  existiert, die die beiden Punkte verbindet, so daß gilt  $\zeta L_{z,z'} \leq d_{z,z'}$ .  
H. G. Tillmann.

### Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

**Rankin, R. A.:** The scalar product of modular forms. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 198—217 (1952).

Es wird eine Methode entwickelt, die für das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_D f(z) \overline{g(z)} y^{k-2} dx dy$$



( $z = x + i y$ ,  $D =$  Fundamentalbereich der Modulgruppe) zweier Modulformen  $f(z)$ ,  $g(z)$  der Dimension  $-k$ , von denen mindestens eine eine Spitzenform ist, explizite Ausdrücke liefert, die für die numerische Berechnung geeignet sind. In den Ausdrücken treten Werte gewisser aus den Koeffizienten der Modulformen abgeleiteten Dirichletreihen auf, gebildet in Punkten, die der Halbebene absoluter Konvergenz angehören, während Petersson (dies. Zbl. 32, 206) für sehr allgemeine Gruppen zu einer Residuendarstellung der Skalarprodukte gelangte. Die vom Verf. angegebenen Formeln gestalten sich besonders einfach, wenn die Schar der Spitzenformen der Dimension  $-k$  den Rang 1 hat, also in den Fällen  $k = 12, 16, 18, 20, 22, 26$ . Außerdem ergeben sich interessante Relationen für die Koeffizienten gewisser spezieller Formen. Das Skalarprodukt der Diskriminante  $\Delta(z)$  mit sich selbst wird mit Hilfe Lehmerscher Tafeln für die Entwicklungskoeffizienten  $\tau(n)$  von  $\Delta(z)$  auf neun Stellen genau berechnet.

H. Maaß.

Myrberg, P. J.: Über automorphe Tetrafunktionen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 111, 13 S. (1952).

Die Hauptkreisgruppe  $\Gamma$  habe das Geschlecht Null; sie werde von endlich vielen elliptischen Substitutionen erzeugt. Verf. beweist die Existenz von ganzen Funktionen  $g(z)$ , durch deren Quotienten jede automorphe Funktion der Gruppe dargestellt werden kann und die sich den Substitutionen von  $\Gamma$  gegenüber nach der Formel  $g(Sz) = \exp(\alpha_S u(z) + \beta_S) g(z)$  verhalten, wo  $u(z)$  eine ganze Funktion ist. Das ist für diese Gruppen eine Verschärfung eines Satzes der klassischen Funktionentheorie. Die ganzen Funktionen  $g(z)$  nennt Verf. automorphe Thetafunktionen. Aus der Gruppeneigenschaft von  $\Gamma$  folgt zunächst für die Funktion  $u(z)$  die Gleichung  $u(Sz) = a_S u(z) + b_S$ , wo  $a_S$  und  $b_S$  von  $S$  abhängige Konstanten sind. Dann folgt, wenn  $x = x(z)$  die Hauptfunktion ist und  $n$  das kleinste Vielfache der Ordnungen der erzeugenden elliptischen Substitutionen, die Gleichung  $u = \int \sqrt[n]{r(x)} dx$  mit rationalem  $r(x)$ . Nach einer genaueren Untersuchung von  $r(x)$  gelingt dann die Konstruktion von primitiven Thetafunktionen, das sind solche, die nur ein System von nichtäquivalenten Nullpunkten besitzen. Quotienten von Produkten primitiver Thetafunktionen liefern die behauptete Darstellung. Eine explizite Darstellung der automorphen Thetafunktionen durch analytische Ausdrücke ergibt sich mit Hilfe der Zeta- und Thetafunktionen von Poincaré.

B. Schoeneberg.

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

• Krilov, A. N.: Über einige Differentialgleichungen der technischen Physik. Belgrad: Naučna Kniga 1952. XII, 431 S. [Serbisch].

Sulgin, M. F.: Über einige Eigenschaften der Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 701–703 (1952) [Russisch].

L'A. considère le système différentiel:

$$(1) \quad \dot{x}_k = X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Un artifice de Liouville permet d'écrire (1) sous la forme canonique (2)  $\dot{x}_k = \partial H / \partial y_k$ ,  $\dot{y}_k = -\partial H / \partial x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) d'ordre  $2n$  moyennant l'introduction de  $n$  variables supplémentaires  $y_i$ . Alors, on peut former une intégrale première nouvelle de (1) connaissant une intégrale première de (1) et de (2) respectivement. Ce résultat, qui constitue une extension du théorème de Poisson, est appliqué à des cas particuliers; on peut aussi en déduire le théorème bien connu de A. Buhl.

J. Kravtchenko.

Grabaf, M. I.: Die Abbildung dynamischer Systeme in Lösungssysteme von Differentialgleichungen. Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 3 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 2), 3–8 (1952) [Russisch].

**Caligo, Domenico:** Sulla integrazione delle equazioni differenziali del secondo ordine a riferimento razionale. *Rend. Mat. e Appl.* **11**, 299—314 (1952).

Sia  $\Phi(x_0, x_1, x_2)$  un polinomio omogeneo, a coefficienti costanti, nelle variabili  $x_0, x_1, x_2$  e si consideri l'equazione differenziale  $\Phi(y'', y', y) = 0$ . Con la sostituzione  $w = y''/y$ ,  $v = y'/y$  si ottiene l'equazione  $\Phi(w, v, 1) = 0$ , e nel caso che questa rappresenti una curva razionale l'A. prova che la scelta della variabile indipendente  $t$ , tale che  $dv/dt = w - v^2$ , consente di pervenire ad un'equazione differenziale del prim'ordine a variabili separabili. Opportuni esempi illustrano il metodo.

*G. Sansone.*

**Erugin, N. P.:** Analytische Theorie der nicht-linearen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 465—486 (1952) [Russisch].

**Schäfer, Friedrich Wilhelm:** Zur Parameterabhängigkeit beim Anfangswertproblem für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen. *Math. Nachr.* **3**, 20—39 (1950).

Vorgelegt sei (1)  $F[y] = \sum_{\kappa=1}^k \lambda^\kappa G_\kappa[y]$ ,  $F[y] = \sum_{\nu=0}^n f_\nu(x) y^{(n-\nu)}(x)$ ,  $f_0 = 1$ ,  
 $G_\kappa[y] = \sum_{\mu=0}^{m_\kappa} g_{\kappa,\mu}(x) y^{(m_\kappa-\mu)}(x)$ ,  $m_\kappa < n$ , wobei die  $f_\nu$  und  $g_{\kappa,\mu}$  stückweise stetig in einem abgeschlossenen Intervall  $I$  der reellen Zahlengeraden bzw. analytisch in einem einfach zusammenhängenden Bereich  $B$  der komplexen Ebene seien. Betrachtet werden die durch feste Anfangsbedingungen (2)  $y^{(\nu)}(x_0) = a_\nu^\dagger$ ,  $\nu = 0, \dots, n-1$  definierte Lösung  $y(x, \lambda)$  und deren Ableitungen  $y', \dots, y^{(n-1)}$  nach  $x$  als Funktionen von  $\lambda$ . Es werden tiefliegende Verschärfungen des Satzes von Poincaré [*Acta math.* **4**, 201—312 (1884)] bewiesen; das Beweisverfahren stützt sich auf Koeffizientenabschätzungen in den Entwicklungen  $y^{(\nu)} = y_0^{(\nu)}(x) + \lambda y_1^{(\nu)}(x) + \lambda^2 y_2^{(\nu)}(x) + \dots$ . Gezeigt wird: (a) Es sei  $k = 1$ . Für jedes reelle  $x \in I$  sind  $y, \dots, y^{(n-1)}$  ganze Funktionen von  $\lambda$  höchstens vom Normaltypus  $N(x, x_0) = \left| \int_{x_0}^x |g_{1,0}(t)|^{1/(n-m)} dt \right|$  der Ordnung  $(n-m)^{-1}$ . Eine ähnliche Aussage gilt im Komplexen. (b)  $y, \dots, y^{(n-1)}$  sind ganze Funktionen von  $\lambda$  in  $I$  bzw. in jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $B$  gleichmäßig höchstens von einem Normaltypus der Ordnung (3)  $\varrho = \max_{1 \leq \kappa \leq k} \kappa/(n-m_\kappa)$ . (Hierbei heißt eine Menge ganzer Funktionen  $f(\lambda)$  gleichmäßig höchstens vom Normaltypus  $\sigma$  der Ordnung  $\varrho$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine ganze Funktion  $g_\varepsilon(\lambda)$  vom Normaltypus  $\sigma + \varepsilon$  der Ordnung  $\varrho$  derart gibt, daß  $|f| \leq |g_\varepsilon|$  für alle diese  $f$  gilt). (c) Es sei  $k = 1$ . Die Koeffizienten in (1) und die  $a_\nu$  in (2) seien reell, und es sei  $g_{1,0} > M > 0$  in  $I$ :  $x_0 \leq x \leq x_1$ . Auch sei  $G_1[y_0] > 0$  für  $x_0 < x < x_0 + \delta$  mit beliebig kleinem  $\delta > 0$ . Dann sind  $y, \dots, y^{(n-1)}$  für  $x_0 < x \leq x_1$  ganze Funktionen von  $\lambda$  vom Normaltypus  $N(x, x_0) = \int_{x_0}^x g_0(t)^{1/(n-m)} dt$  der Ordnung  $1/(n-m)$  mit vollkommen regelmäßigem Wachstum. — Mit Hilfe dieser Ergebnisse und einfacher Sätze über ganze Funktionen gewinnt man wichtige Aussagen über die Existenz und Verteilung der Eigenwerte bei Eigenwertproblemen bez. (1). Z. B. folgt aus (b): Es sei

$$(4) \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\sigma=1}^s \alpha_{\nu\mu\sigma}(\lambda) y^{(\mu)}(a_\sigma) + \sum_{\mu=0}^{n-1} \int_a^b \beta_{\nu\mu}(x, \lambda) y^{(\mu)}(x) dx = 0, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

$$a = a_1 < a_2 < \dots < a_s = b;$$

die  $\alpha_{\nu\mu\sigma}$  seien ganze Funktionen höchstens von einem Normaltypus einer endlichen Ordnung  $\bar{\varrho}$ ; die  $\beta_{\nu\mu}$  seien stetig für  $x \in I$ :  $a \leq x \leq b$  und für diese  $x$  ganze Funktionen von  $\lambda$  und gleichmäßig höchstens von einem Normaltypus der Ordnung  $\varrho$ . Dann ist die charakteristische Determinante  $\Delta(\lambda)$  des Problems (1), (4) eine ganze



Funktion von  $\lambda$  und höchstens von einem Normaltypus der Ordnung  $r = \max(\rho, \varrho)$ , vgl. (3). Demnach existieren höchstens endlich viele oder abzählbar unendlich viele Eigenwerte oder jede Zahl ist Eigenwert. Ist  $r < 1$  und  $l$  kein Eigenwert, so gilt die Darstellung  $\Delta(\lambda) = \Delta(l) \prod_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{\nu} - \lambda)/(\lambda_{\nu} - l)$ . — Die vorliegenden Ergebnisse schließen Resultate einer später erschienenen Arbeit von Zlámal (s. dies. Zbl. 66, 336) als Sonderfälle ein.

*E. Kreyszig.*

Latyševa, K. Ja.: Normalreihen als Lösungen linearer Differentialgleichungen im Falle mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Ukrain. mat. Žurn. 4, 124–136 (1952) [Russisch].

Let  $y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_n y = 0$ ,  $P_i = x^{\beta_i} \sum_0^{\infty} P_{is} x^{-s}$ ,  $\beta_i$  positive integers,  $P_{i0} \neq 0$ , the series being convergent or asymptotic. It is possible to find formal solutions of the type (2):  $y \sim e^{Q(x)} \cdot x^r \sum_0^{\infty} c_i x^{-i}$ , where  $Q = \sum_1^q \frac{\alpha_{q-s} x^s}{s}$ ,  $q \leq 1+k$ ,  $k = \max_i \beta_i - 1$ ;  $\alpha_0$  is a solution of the characteristic equation  $\alpha_0^n + \sum_1^n \tau_i \alpha_0^{n-i} = 0$ ,  $\tau_i = P_{i0}$  if  $\beta_i - 1 = k$ ,  $i = 0$  otherwise (it is apparently understood that  $k$  is an integer; the 1 in the last equation is erroneously omitted). If the characteristic equation has multiple roots some solutions are „lost“. In the case where there is a root of multiplicity  $l_0$  the other roots being simple, the author considers conditions under which it is possible to recover these solutions; it is not always possible to have them in the form (2) but other formal solutions of the type  $e^{Q(x)} \sum_{i,j} c_{ij} x^{ri-j} \cdot \log^{i-1} x$  may be found. Conditions under which one or other situation takes place are investigated as well as the convergence of the formal series. The detailed statements are too complicated to be reproduced here.

*J. L. Massera.*

Sarantopoulos, Spyridon B.: Some nuclei of contour integrals which satisfy linear differential equations. Bull. Soc. math. Grèce 26, 109–130 (1952).

Si considerino l'equazione differenziale  $\sum_{q=0}^{\mu} P_q(x) \frac{d^q y}{dx^q} = 0$ , con  $P_q(x)$  polinomio in  $x$  di grado  $\nu$  al massimo  $P_q(x) = \sum_{s=0}^{\nu} \alpha_{q,s} x^s$ , ( $\alpha_{q,s}$  costanti) l'equazione coniugata  $\sum_{r=0}^{\nu} Q_r(z) \frac{d^r \omega}{dz^r} = 0$ ,  $Q_r(z) = \sum_{s=0}^{\mu} \alpha_{s,r} z^s$ , e le rispettive equazioni aggiunte. L'A. studia la rappresentazione dei loro integrali mediante integrali curvilinei della forma  $\int_C K(x, z) v(z) dz$  estesi a contorni  $C$ , nei casi in cui il nucleo  $K(x, z)$  ha una delle forme  $e^{zx}$ ,  $x^n e^{zx}$ ,  $(c_0 + c_1 x + \dots + c_{\nu} x^{\nu}) e^{zx}$ ,  $(\sigma_1(x) v_1(z) + \dots + \sigma_h(x) v_h(z)) e^{zx}$ , con  $\sigma_1(x), \dots, \sigma_h(x)$  polinomi in  $x$  e  $v_1(z), \dots, v_h(z)$  funzioni da determinare.

*G. Sansone.*

Gel'fond, A. O.: Lineare Differentialgleichungen unendlicher Ordnung mit konstanten Koeffizienten und asymptotische Perioden ganzer Funktionen. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 42–67 (1951) [Russisch].

A  $\varphi(t) = \sum a_n t^n/n!$ , entière d'ordre 1 et de type fini  $\sigma$ , on associe l'opérateur  $L$  qui fait correspondre à  $F(z)$ , régulière dans  $|z| \leq \sigma$ , la fonction  $\sum a_n F^{(n)}(z)/n!$ , régulière dans un voisinage de l'origine. 1. L'équation homogène  $L(F) = 0$  est vérifiée par  $z^p e^{\lambda_k z}$ , si  $\alpha_k$  est un zéro (d'ordre  $m_k$ ) de  $\varphi(t)$  et si  $p < m_k$ . A. F. Leont'ev (ce Zbl. 45, 351) a discuté le caractère complet de ce système de fonctions dans l'espace des solutions. L'A. cherche ici à représenter une solution  $F(z)$  par une série convergente  $\sum P_k(z) e^{\lambda_k z}$  ( $d^0 P_k < m_k$ ). Il est facile d'associer à  $F(z)$  une série formelle de ce type; la convergence vers  $F(z)$  d'une suite convenable de sommes partielles est établie moyennant une hypothèse, soit sur le comportement du module minimum

$\min_{|t|=r} |\varphi(t)|$ , soit sur  $F(z)$  (entière, croissance plus rapide que les types finis de l'ordre 1). La convergence de la série elle-même demande des hypothèses supplémentaires. 2. L'équation avec second membre  $L(F) = \Phi(z)$ ,  $\Phi(z)$  est une fonction entière, admet pour tout  $\theta > 1$  une solution  $F_0$  vérifiant  $\log M_0(r) > C(\theta) \log M(r)$ ,  $M$  et  $M_0$  désignant respectivement les modules maximums des fonctions  $\Phi$  et  $F$ . 3. Si  $\varphi(t)$  et la fonction analogue  $\varphi_1(t)$  n'ont pas de zéro commun, sauf peut-être un zéro simple à l'origine, toute fonction entière qui satisfait à la fois à  $L(F) = 0$  et à  $L_1(F) = 0$  est une constante. Dans le cas particulier  $\varphi(t) = e^{t\tau} - 1$ ,  $\varphi_1(t) = e^{\tau_1 t} - 1$  [c'est-à-dire  $L(F) = F(z + \tau) - F(z)$ ,  $L_1(F) = F(z + \tau_1) - F(z)$ ], cet énoncé redonne l'impossibilité d'une fonction entière à deux périodes indépendantes. S'inspirant de la définition donnée par Whittaker dans le cas d'une fonction de l'ordre fini, l'A. définit des „périodes asymptotiques“ d'une fonction entière d'ordre infini et étudie l'ensemble des périodes asymptotiques d'une même fonction.

G. Bourion.

Malkin, I. G.: Über die charakteristischen Zahlen linearer Differentialgleichungen. Priklad Mat. Mech. 16, 3–14 (1952) [Russisch].

Let  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , and  $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_n$  be the sets of characteristic numbers, in Ljapunov's sense, of the systems (1)  $dx/dt = P(t)x$ ; (2)  $dx/dt = (P(t) + \Phi(t))x$ , where  $x = \{x_s\}_n^T$ , and  $P(t) = \{p_{sj}(t)\}_n^n$ ,  $\Phi(t) = \{\varphi_{sj}(t)\}_n^n$  are continuous  $n$ -th order matrices. The author finds conditions for the stability of the  $\lambda_i$ , under which for every  $\varepsilon > 0$  there is an  $\eta > 0$  such that  $|\varphi_{sj}(t)| \leq \eta$  ensures that  $|\lambda'_i - \lambda_i| < \varepsilon$ ; in some cases he finds suitable values for  $\eta$ . His first two theorems postulate bounds for a certain set of  $n$  solutions of (1), namely  $\{\bar{x}_{sj}(t, t_0)\}_n^n$ , where  $\bar{x}_{sj}(t_0, t_0) = \delta_{sj}$ . Theorem I asserts a one-sided stability of the form  $\lambda'_i - \lambda_i \geq -\varepsilon$ , while Theorem II, requiring in addition the „regularity“ of (1), asserts the full stability of the  $\lambda_i$ . In Theorem III a sharper bound on the  $\bar{x}_{sj}(t, t_0)$  is postulated, of the form  $|\bar{x}_{sj}(t, t_0)| < M \exp(-\alpha(t - t_0))$ , where  $M \geq 1$  and  $\alpha > 0$  are independent of  $t_0$ ; here  $|\varphi_{sj}(t)| < \alpha/m$   $M$  ensures that all the  $\lambda'_i$  are positive [ $m = \max m_s$ ,  $m_s$  the number of members occurring in  $\sum_{\alpha=1}^n \bar{x}_{sx}(t, \tau) (\varphi_{\alpha 1} x_1 + \dots + \varphi_{\alpha n} x_n)$ ; of course  $m \leq n^2$ ]. In the rest of the paper, without formulating any theorem, the author expounds a method for ascertaining the sign of  $\lambda'_n$  when  $\lambda_n = 0$ . Assume that  $P$  is constant, and replace (2) by (2')  $dx/dt = (P + \mu \Phi^*)x$ , where  $\mu > 0$  is small. Use a substitution  $y = x + \mu F(t)x$  to transform (2') to the form (2'')  $dy/dt = (P + \mu A + \mu^2 Y)y$ , where  $A$  is constant. The comparison of (2'') with  $dy/dt = (P + \mu A)y$  may then be more successful than the comparison of (2') with (1). The necessary restrictions on the  $\varphi_{sj}(t)$  include that they should have mean-values, and should not „resonate“ with certain excluded harmonics. Several examples with  $n = 2$  illustrate the various results.

F. V. Atkinson.

Demidovič, B. P.: Über gewisse Eigenschaften der charakteristischen Exponenten eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski 163, Mat. 6, 123–132 (1952) [Russisch].

Considérons le système d'équations différentielles linéaires ordinaires

$$(1) \quad x'_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$p_{ij}(t)$  étant des fonctions réelles, continues et bornées sur l'intervalle,  $-\infty < t < +\infty$ , et périodiques de la même période  $\omega$ . Faisant allusion aux nombres caractéristiques des équations différentielles ordinaires du second ordre étudiés par Liapounoff et Hill, l'A. compose l'équation caractéristique pour calculer les nombres caractéristiques du système (1). Grâce à la méthode des approximations successives l'équation requise est représentée par le déterminant symbolique:

$$\left\| \delta_{ij} (1 - \varrho) + \int_0^\omega p_{ij}(t_1) dt_1 + \int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} \left[ \sum_{k=1}^n p_{ik_1}(t_1) p_{k_1 j}(t_2) \right] dt_2 + \dots \right\| = 0,$$

où  $\|\delta_{ij}\|$  désigne la matrice unitaire, en posant, d'autre part,  $\varrho = e^{i\lambda\omega}$ ,  $\lambda$  étant le nombre caractéristique en question. Un autre déterminant symbolique établit, au moyen de la matrice du système (1), la condition d'existence de la solution périodique  $\omega$  de ce système. Tout spécialement est étudié le cas, où les coefficients des équations



(1) sont remplacés par leurs valeurs moyennes. Enfin, sont traités les équations (1) de la forme symétrique et gauche-symétrique. Pour achever son calcul l'A. est obligé de généraliser la formule connue de Dirichlet sur les intégrales multiples. L'A. considère l'équation obtenue comme exacte. Or la méthode des approximations successives ne donne que les valeurs approchées des nombres caractéristiques; et leur introduction fait perdre aux formules de Liapounoff leur caractère des solutions étudiées.

N. Saltykow.

**Štokalo, I. Z.:** Zur Frage der Verallgemeinerung einer grundlegenden Formel der symbolischen Methode. Ukrain. mat. Žurn. 1, Nr. 3, 51—59 (1949) [Russisch].

Die Ausdehnung der symbolischen Methode auf lineare Differentialgleichungen mit fast-periodischen Koeffizienten führte den Verf. auf die Gleichung  $dx/dt - [A + \varepsilon f(t)]x = C e^{pt}$ , in der  $A$  und  $C$  konstante Matrizen,  $f(t)$  eine beschränkte Matrix sein soll. Den Kern der Arbeit bildet die Behauptung, daß diese Gleichung genau eine Lösung  $\xi(t, p, \varepsilon) e^{pt}$  mit für alle reellen  $t$  beschränktem Vektor  $\xi$  besitzt. Dazu wird  $\xi = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{u_v(t, \varepsilon)}{p^{v+1}} + \frac{\sigma_n(t, p, \varepsilon)}{p^n}$  gesetzt und zu zeigen versucht, daß die  $u_v$  und  $\sigma_n$  beschränkt sind. Aber auch unter der durch die Rechnung nahegelegten Voraussetzung, daß alle Ableitungen von  $f(t)$  existieren und beschränkt sind, ergibt sich nicht ohne weiteres, daß alle  $|u_n|$  unter einer gemeinsamen Schranke  $M$  liegen. Hängt aber  $M$  von  $n$  ab, so auch die Schranke für  $|\sigma_n|$ , S. 57 Z. 11, wo rechts die Konstante  $M$  zu ergänzen ist.

Adam Schmidt.

**Bückner, Hans:** Inequalities for solutions of linear differential equations. A contribution to the theory of servomechanisms. Edinburgh math. Notes 38, 13—16 (1952).

Beweis folgenden Satzes: Wenn die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung  $y + c_1 y' + \dots + c_n y^{(n)} = f(x)$  mit reellen Koeffizienten  $c_v$  und reeller in  $a \leq x \leq b$  stetigen Funktion  $f(x)$  keine rein imaginären Wurzeln hat, kann immer ein partikuläres Integral  $\eta(x)$  gefunden werden, das der Ungleichung  $|\eta| \leq C \cdot M$  genügt, wo  $C$  eine Funktion der  $c_v$  allein ist und  $M$  das Maximum von  $|f|$ . Insbesondere kann man  $C = 1$  setzen, wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung reell sind. — Die Konstante  $C$  wird angegeben. Wenn alle Wurzeln negativen Realteil haben, kann man  $\eta$  so wählen, daß  $\eta(a) = \eta'(a) = \dots = \eta^{(n-1)}(a) = 0$  ist.

H. Molitz.

**Taam, Choy-Tak:** Non-oscillatory differential equations. Duke math. J. 19, 493—497 (1952).

Generalizing a criterion of Wintner the author proves among other things:

(\*)  $(P(x) Y')' + F(x) Y = 0$ , (\*\*)  $(p(x) y')' + f(x) y = 0$ , with  $\int_a^\infty F(x) dx \geq$

$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right|$ ,  $p(x) \geq P(x) > 0$ ,  $P(x) \leq A$  for  $a < x < \infty$  ( $a$  large). If (\*) is nonoscillatory then (\*\*) also is.

G. Borg.

● **Peyovitch, T.:** Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles. Belgrade: Société des Mathématiciens et Physiciens de la R. P. de Serbie 1952. 50 p.

Concernant l'équation différentielle linéaire  $dy/dx + a y = f(x)$ , où  $f(x)$  est une fonction continue telle que  $f(x) = o(1)$  pour  $x \rightarrow +\infty$ , on étudie surtout l'existence de la solution telle que  $y = o(1)$ , en supposant dans le paragraphe 1 que  $a$  soit une constante  $r$  et puis dans le paragraphe 2 que  $a$  soit asymptotique à la constante  $r$ . Dans le paragraphe 3, on étudie le même problème pour l'équation non linéaire

$$dy/dx + r y = f(x) + \varphi(x, y),$$

où  $\varphi(x, y)$  est une fonction continue pour  $x_0 \leq x < \infty$ ,  $|y| < N$ , s'annulant pour  $y = 0$  et satisfaisant à la condition de Lipschitz. Dans les trois paragraphes suivants, on étudie parallèlement le même problème sous les hypothèses analogues pour le

système des équations différentielles

$$\frac{dy_j}{dx} + \sum_{k=1}^n a_{jk} y_k = f_j(x) + \varphi_j(x, y_1, \dots, y_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

La méthode utilisée est celle des approximations successives. Les résultats relatifs aux équations linéaires sont ceux que l'A. a déjà obtenus antérieurement (ce Zbl. 5; 292).

M. Hukuhara.

Cahen, Gilbert: Etude topologique de certaines équations différentielles non linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1003—1005 (1952).

Markus, L.: Escape times for ordinary differential equations. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 11, 271—277 (1952).

L'A. étudie la durée de séjour  $T$  d'une particule  $M(t)$ , assujettie à vérifier une équation différentielle:  $\vec{M}'(t) = \vec{V}(M)$ , dans un domaine  $\Omega$ . L'A. établit d'abord des propriétés de semi-continuité très générales de  $T$ ; il examine ensuite le cas  $\Omega = R^n$  et des conditions imposées à  $\vec{V}$  telles que  $T$  soit infini.

G. Reeb.

Gichman, I. I.: Zu einem Satz von N. N. Bogoljubov. Ukrain. mat. Žurn. 4, 215—219 (1952) [Russisch].

Citant un théorème de N. Bogoljubov [Sur quelques méthodes statistiques de la Physique théorique, Acad. Sci. de l'Ukraine 1945 (en russe)] et celui de l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle ordinaire du premier ordres (1)  $dx/dt = X(t, x, \lambda)$ ,  $\lambda$  désignant un paramètre variable dans un certain domaine qui tend vers une limite  $\lambda_0$ , l'A. formule son théorème. Il s'agit, précisément, d'établir les conditions nécessaires [a), b), et c)] pour que la limite de l'intégrale de l'équation (1), que l'on obtient en faisant tendre  $\lambda$  vers  $\lambda_0$ , soit identique à l'intégrale de l'équation que l'on obtient en substituant  $\lambda_0$  au lieu de  $\lambda$  dans l'équation (1). N. Saltykow.

Volosov, V. M.: Zur Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit einem kleinen Parameter bei der höchsten Ableitung. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 645—674 (1952) [Russisch].

The topic of singular perturbations has been studied by A. N. Tichonov [Mat. Sbornik, n. Ser. 22 (64), 193—204 (1948; this Zbl. 37, 344) and 27 (69), 147—156 (1950)] in the following form: — conditions are to be found which ensure that a solution of the system tends, as the small parameters tend to zero, to a solution of the „degenerate system“, obtained by equating the small parameters to zero. The present author, in a series of papers, studies a more general situation in which the solution of the original system does not tend to a solution of the degenerate system, but instead oscillates finitely about it; the problem is then to determine the limits of this oscillation. The present paper is devoted to the case  $\mu y^{(n)} + Q(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}) = 0$ , ( $n \geq 3$ ), which differs essentially from cases studied by Tichonov and others in that  $y^{(n-1)}$  is absent from  $Q$ . Let the equation  $Q(x, y_0, \dots, y_{n-3}, z) = 0$  have the unique root  $z = f(x, y_0, \dots, y_{n-3})$ , ( $z - f$ ) $^{-1}Q$  having positive upper and lower bounds; let also  $Q$  and  $f$  have bounded and continuous partial derivatives of the second and third orders, respectively. Let  $y^{(r)}(x_0)$ , ( $r = 0, \dots, n-1$ ), be fixed. Then the following holds: — (i) as  $\mu \rightarrow 0$ , the  $y^{(r)}(x)$  ( $r = 0, \dots, n-3$ ) tend to certain limit functions  $\Phi_r(x)$ . — (ii)  $y^{(n-2)}(x)$  oscillates about  $f$  according to the formula

$$y^{(n-2)}(x) = \varepsilon(\mu) + f(x, \Phi_i(x)) + u(x, \mu) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x f'_{y^{(n-3)}}(t, \Phi_i(t)) dt \right),$$

( $l = 0, 1, \dots, n-3$ ), where  $\varepsilon(\mu) \rightarrow 0$  as  $\mu \rightarrow 0$ ,  $u$  oscillates finitely with a frequency of order  $\mu^{-1/2}$ . — (iii) the maxima and minima of  $u$  approach certain „support functions“  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ . — (iv) the  $F_r(x)$ ,  $\Phi_r(x)$  are roots of certain functional equations, too lengthy to reproduce, not involving  $\mu$ . — (v)  $y^{(n-1)}(x)$ ,  $y^{(n)}(x)$  are „generally speaking“ not bounded as  $\mu \rightarrow 0$ . An evaluation is given for  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{x_0}^x \psi dx$ , where  $\psi = \psi(x, y, y', \dots, y^{(n-2)})$  is any function with continuous partial derivatives. An extension is indicated to equations of the form

$$\mu \{y^{(n)} + p(x) y^{(n-1)} + g(x, y, y', \dots, y^{(n-2)})\} + Q = 0. \quad F. V. Atkinson.$$



**Volosov, V. M.:** Über die Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die von einem Parameter abhängen. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 675—686 (1952) [Russisch].

The author considers a slight variant of the last problem mentioned in the preceding review, dealing now with the case  $\mu\{y'' + \varphi(x, y, y')\} + \Phi(x, y) = 0$ ,  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$ , extending his previous results for the case  $\mu y'' + Q(x, y) = 0$  (this Zbl. 49, 186). Let  $y = f(x)$  be the root of  $\Phi(x, y) = 0$ , and let  $(y - f)^{-1}\Phi$  have positive upper and lower bounds. Assume also a bound of the form  $|\varphi(x, f + u, f' + u')| \leq C_1 + C_2|u| + C_3|u'|$ , and let  $\varphi(x, f + u, f' + u')/u'$  tend as  $u' \rightarrow \pm\infty$  to smooth functions of  $x$  and  $u$ . Then, subject to differentiability assumptions, there holds as  $\mu \rightarrow 0$  an asymptotic representation  $y = f(x) + u$ , where  $u$  oscillates about  $u = 0$  between two support functions, as in the previously reviewed paper. Functional equations are given for the support

functions. Also given is the evaluation of  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_a^b \psi(x, y(x)) dx$ , where  $\psi$  has continuous first derivatives. An example is given to show that the result may fail if  $\varphi(x, y, y')$  is of order of magnitude  $y'^2$  for fixed  $x$  and  $y$ ; it is not suggested however that the author's assumptions are in general necessary. F. V. Atkinson.

**Svirskij, I. V.:** Über eine Abschätzung der Genauigkeit der Variationsmethoden zur Bestimmung von Eigenwerten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 889—892 (1952) [Russisch].

Die Eigenwerte  $\lambda_k$  eines nach unten halbbeschränkten, selbstadjungierten Differential-Operators  $H$  mit Punktspektrum werden durch die gewöhnliche Variationsmethode von Timoshenko-Ritz von oben approximiert. Die als bekannt angenommenen Eigenwerte  $\lambda_k^0$  eines gleichartigen, aber „kleineren“ Operators  $H_0 \leq H$  (d. h.  $(H_0 u, u) \leq (H u, u)$  für alle  $u$  einer gewissen Menge!) sind zuweilen brauchbare untere Schranken für die  $\lambda_k$ . Ausgehend von  $H_0$  gibt der Verf. ein Verfahren zur Konstruktion schrittweise verbesserter Vergleichsoperatoren an, deren Eigenpaare leicht bestimmbar sind. Unter Verwendung der Spektraldarstellung von  $H_0 f$  wird zunächst ein Operator  $H_1 \leq H_0$  aus  $m$  Eigenpaaren von  $H_0$  aufgebaut. Der Differenzoperator  $H - H_1 \geq 0$  wird dann in gewissem Sinne optimal durch einen einfachen nichtnegativen selbstadjungierten Operator  $H_3 \leq H - H_1$  approximiert. Dabei stützt sich der Verf. auf Ergebnisse von M. G. Krejn zur Bestimmung des kleinsten derartigen Operators, der  $n$  gegebene  $f_i$  in  $n$  andere gegebene  $g_i$  transformiert. Der verbesserte Vergleichsoperator ist dann  $H_4 = H_1 + H_3$ .  $H_4$  läßt sich sogar ohne Kenntnis der Eigenfunktionen von  $H_0$  konstruieren. Dann beweist der Verf. die folgende Fehlerabschätzung:

$$0 \leq \lambda_{q^0} - \lambda_q \leq D_q^2 / [\lambda_{m+1}^0 - \lambda_{q^0} + |D_q|] \quad \text{mit} \quad D_q^2 = (H\varphi_q, H\varphi_q) - (H\varphi_q, \varphi_q)^2.$$

Darin bedeuten:  $\lambda_q$  = Gesuchter Eigenwert von  $H$ ,  $\lambda_{q^0} =$  Ritzscher Näherungswert aus einem  $\vartheta$ -gliedrigen Ansatz;  $\varphi_q$  = Orthonormierte Ritzsche Näherung der  $q$ -ten Eigenfunktion  $\lambda_{m+1}^0 = \lambda'_{m+1} - 2 \sum_{i=1}^m |D_i|$ ,  $\lambda'_{m+1}$  = Unterer Vergleichswert für den  $m$ -ten Eigenwert. Für Operatoren  $n$ -ter Ordnung müssen die Eigenfunktionen und ihre ersten  $n$  Ableitungen gut approximiert werden, wenn die Abschätzung gut ausfallen soll. — Zahlenbeispiele werden nicht angegeben. G. Bertram.

**Svirskij, I. V.:** Über die Genauigkeit der Methode von Galerkin. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 88, 757—760 (1953) [Russisch].

In der linearen Randwertaufgabe  $H f(x) = h_1(x)$ ,  $f \in D(H)$  sei  $H$  nach unten halbbeschränkt, symmetrisch und besitze ein Punktspektrum.  $\Phi_1 \approx H^{-1} h_1$  sei eine Galerkinsche Näherung. Mit geeignet gewählten Sprungfunktionen  $\tilde{u}$  und  $h_2 = H \tilde{u}$  erhält man durch Teilintegration von  $H f \tilde{u} = h_1 \tilde{u}$  für  $x = a$  Formeln vom Typus  $f(a) = (H^{-1} h_1, h_2) - (h_1, \tilde{u})$  (so für die Schwingungsgleichung). Das erste Glied ist  $\approx (\Phi_1, h_2)$ , das zweite ist exakt bekannt. Ist  $[H]^{-1}$  die Galerkinsche Näherung von  $H^{-1}$  und  $H_4^{-1}$  ein Operator, den man unter Verwendung des Vergleichungssatzes iterativ ermitteln kann (s. das vorstehende Referat), so gilt unter gewissen Voraussetzungen  $([H]^{-1} f, f) \leq (H^{-1} f, f) \leq (H_4^{-1} f, f)$ . Ist dann  $\Phi_2$  eine Galerkinsche

Näherung der Gleichung  $Hf = h_2$ , so liegt der Fehler

$$\varepsilon = (H^{-1} h_1, h_2) - (\Phi_1, h_2) = (H^{-1} [h_1 - H \Phi_1], h_2 - H \Phi_2)$$

in einem Ellipsenbereich der komplexen Ebene, der sich unter Verwendung von  $[H]^{-1}$ ,  $H_4^{-1}$ ,  $h_1$  und  $h_2$  bestimmen läßt. In Sonderfällen sind Vereinfachungen möglich. Numerische Erfahrungen werden nicht mitgeteilt. — [Seite 759 letzte Zeile muß heißen:  $(h_1 - H \Phi_1, \Psi_k) = 0$ ,  $(h_2 - H \Phi_2, \Psi_k) = 0$ .] *G. Bertram.*

**Hartman, Philip:** On the zeros of solutions of second order linear differential equations. *J. London math. Soc.* **27**, 492—496 (1952).

Verf. beweist, daß für die Anzahl der Nullstellen,  $N(\lambda)$ , einer (nichttrivialen) Lösung von  $y'' + (\lambda - q(t))y = 0$ , wo  $q$  stetig, wachsend und konvex ist,

die Beziehung  $\pi N(\lambda) = \int_0^{\Phi(\lambda)} (\lambda - q(t))^{1/2} dt + O(1)$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  gilt; dabei ist

$\Phi(\lambda) \equiv \lambda$ . Dies verallgemeinert ein Ergebnis von Titchmarsh (Eigenfunction expansions . . ., Oxford 1946, Kap. VII), in dem  $q \in C^2$  und  $0 \leq q'' \leq (q')$ , mit  $1 < \gamma < 4/3$  für genügend große  $t$  vorausgesetzt ist. *H. A. Antosiewicz.*

**Krejn, M. G.:** Über eine Verallgemeinerung von Untersuchungen von Stieltjes. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **87**, 881—884 (1952) [Russisch].

In previous papers the author has considered the analytic theory connected with a vibrating string, loaded in any way, whose ends are either fixed or can slide transversely. If the string has continuous density this is a problem in Sturm-Liouville theory; the extension from the latter to the theory of the string has been shown to be important in that it makes possible a more complete account of inverse spectral problems (this *Zbl.* **48**, 70). The connection with investigations of Stieltjes on continued fractions and moment problems is obtained by taking the string to be light and to bear particles. The author now gives a more systematic account of this theory, using a purely analytic formulation, including the case of a semi-infinite interval. His first theorem gives properties of functions  $\varphi$ ,  $\psi$ , defined for given non-decreasing  $\sigma(x)$  by

$$\varphi(x; \lambda) = 1 - \lambda \int_0^x (x-s) \varphi(s; \lambda) d\sigma(s), \quad \psi(x; \lambda) = x - \lambda \int_0^x (x-s) \psi(s; \lambda) d\sigma(s),$$

where  $0 \leq x < l \leq \infty$ ; these results can be regarded as in the main an extension of eigenfunction theory for the limit-circle case. The remainder of the paper is concerned with „positive spectral functions“. For given  $\sigma(x)$ , a spectral function  $\tau(\lambda)$  is non-decreasing and satisfies the Parseval relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) = \int_0^l |f(x)|^2 d\sigma(x), \quad F(\lambda) = \int_0^l f(x) \varphi(x; \lambda) d\sigma(x),$$

for a suitable class of  $f(x)$ ;  $\tau(\lambda)$  is „positive“ if  $\tau(\lambda) = 0$  for  $\lambda < 0$ . Theorem 2 states properties

of functions of the form  $\int_0^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t - \lambda}$  and corresponds to known results for eigen-functions and continued fractions. Theorem 3 considers the problem of the existence of  $\sigma(x)$  for given  $\tau(\lambda)$ ;

in particular it imposes on  $\tau(\lambda)$  the necessary and sufficient condition  $\int_0^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{1 + \lambda} < \infty$ .

Theorem 4 considers what additional condition must be imposed in order that for the given  $\tau(\lambda)$  there should exist  $\sigma(x)$  satisfying  $\int_0^l \sqrt{\sigma'(x)} dx = T$ , for given  $T$  with  $0 < T \leq \infty$ . The answer

involves the function  $\Phi_{\tau}(t) = \int_0^{\infty} \lambda^{-1} (1 - \cos t \lambda) d\tau(\lambda)$ , also used in the above-cited paper, and there interpreted dynamically. There are no proofs. *F. V. Atkinson.*

**Avakumović, Vojislav G.:** Über die Randwertaufgabe zweiter Ordnung. *Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math.* **4**, 1—8 (1952).

Conditions for the existence of solutions of (\*)  $y'' = f(x, y)$ ;  $y(a) = y(b) = 0$ , generalizing those of Picard. If  $f(x, y)$  is continuous;  $|f(x, y)| \leq h(x)$ ;  $|f(x, y) - f(x, y_1)| \leq \lambda |y - y_1|$ ;  $x, y, y_1$  satisfying  $a \leq x \leq b, |y| < H(x)$  then (\*) has one solu-



tion  $y$ ,  $|y| < H(x)$  if  $\lambda(b-a)^2 < \pi^2$ . Here  $H(x) = \int_a^b G(x, t) h(t) dt$ ,  $G$  being the Green function of (\*) for  $f = 0$ . Application: If  $f(x, 0) = 0$  and  $y(x)$  is a non-trivial solution of (\*) then  $(b-a) \geq \pi/\sqrt{\lambda}$ . G. Borg

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Sloovere, Henri de: Sur le nombre d'invariants distincts, fonctions de tenseurs d'après la méthode de Lie et de Donder. I—III. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. V. Sér. **37**, 583—598 (1951); **38**, 131—135, 437—441 (1952).

I. The author's purpose is to obtain a complete system of partial differential equations for the determination of invariants  $J$  which depend upon: (1) a symmetric third order tensor; (2) a vector and its first and second derivatives. To solve these problems, the author introduces the Lie infinitesimal transformation which generates the group of transformations and a partial derivative operator used by De Donder (Théorie invariante du calcul des variations, this Zbl. **13**, 169). With the aid of these tools, the author determines operators whose commutators are linearly expressible in terms of the operators and, thus, these operators form the desired complete system. In the first example, the desired operators are easily determined. However, in the second example, extensive calculations are required in order to show that the chosen operators satisfy the commutator conditions. — II. The author shows that by use of new variables, the derivatives introduced by De Donder and used by the author in part I can be replaced by ordinary partial derivatives. Further it is shown that this replacement of derivatives is possible in the complete system derived in the previous paper, without changing the coefficients of structure. — III. As in the previous parts the invariants of complete systems of partial differential equations in  $n$  independent variables are discussed. By calculation of invariants it is shown in the present paper that for  $n = 2$ , one and only one invariant exists. (Reviewer's note: for Riemannian spaces, this result follows from the Frenet formulas and the fundamental theorem of curve theory. That is, the curvature of a curve is its only invariant in two-space.)

N. Coburn (M. R. **13**, 493; **14**, 84, 205).

Dungen, Frans H. van den: Variants intégraux associés aux équations hyperboliques linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1106—1107 (1952).

Ausgehend von der Idee der Integralvarianten nach de Donder erläutere Verf. mit Hilfe der Theorie der Fourier-Transformation Ansätze zur Behandlung linearer hyperbolischer Differentialgleichungen. Clarus Müller.

\*Mangeron, D. I.: Problème des spectres pour les systèmes différentiels réduits. Bull. Inst. Politechn. Jassy **4**, 441—445 (1949).

● Diaz, J. B. and M. H. Martin: Riemann's method for partial differential equations of hyperbolic, parabolic and elliptic types. University of Maryland. The Institute for fluid dynamics and applied mathematics. 1952. (Lecture Series No. 29) 33 p.

● Hadamard, Jacques: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. New York: Dover Publications 1952. V, 316 p. \$ 1,70 paperbound \$ 3,50 clothbound.

Nachdruck des in New Haven, London, Oxford 1923 erschienenen Bandes.

Ljance, V. E.: Über das Cauchysche Problem im Gebiet der Funktionen von reellen Veränderlichen. Ukrain. mat. Žurn. **1**, Nr. 4, 42—63 (1949) [Russisch].

L'A. étudie l'existence des intégrales de Cauchy dans le domaine réel, d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles d'un ordre quelconque plusieurs fonctions inconnues, dont le nombre égale à celui des équations; ces dernières étant résolues par rapport aux dérivées partielles du premier ordre prises par rapport

une même variable indépendante. Les équations de ce type (comme celle de la chaleur de Fourier) avait signalé S. Kovalevska dans son Mémoire classique sur l'existence des intégrales d'un système normal [J. reine angew. Math. 80, 1—32 (1875)], en démontrant les difficultés de leur appliquer son analyse. L'A. part des conditions étudiées par I. Petrovsky (ce Zbl. 13, 401), mais profitant d'autres méthodes, en représentant les intégrales cherchées au moyen des intégrales de Fourier. L'A. avait rencontré dans son exposé une difficulté qu'il n'avait pas réussi de surmonter. Pour établir l'existence des intégrales étudiées il est parti de l'hypothèse que les intégrales cherchées étaient développables en certaines séries infinies. Mais il n'est par parvenu de démontrer que toutes les intégrales qu'il avait trouvées, jouissaient de la dite propriété.

N. Saltykow.

Karapandjitch, Djordje: Contribution aux méthodes d'intégration des systèmes des équations linéaires aux dérivées partielles. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, Nr. 3/4, 29—37 [Serbisch] mit französ. Zusammenfassg. 37 (1952).

Malmheden, Harry: The covariant solution of Cauchy's problem for Maxwell's equations in their relativistic form by means of Riesz integrals. Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz 152—159 (1952).

L'A. donne une solution covariante du problème de Cauchy relatif aux équations de Maxwell écrites sous forme relativiste. Utilisant le formalisme de la géométrie de Riemann, l'A. ramène le problème étudié à la résolution du problème de Cauchy pour un potentiel-vecteur  $\varphi^\alpha$  satisfaisant au système  $\Delta \varphi^\alpha + R^\alpha_\beta \varphi^\beta = s^\alpha$ ,  $R^\alpha_\beta$  désignant le tenseur de courbure contracté. Ce problème est alors résolu en utilisant des résultats établis antérieurement par l'A. (ce Zbl. 29, 215). G. Petiau.

Kothari, L. S. and P. L. Bhatnagar: On a modified definition of Riesz potential and its correspondence to the Wentzel potential. Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 171—175 (1952).

Die modifizierte Definition des Rieszschen Potentials ist durch

$$A_\mu^\alpha(x) = H(\alpha) \int_{(D)} k^{\alpha-2} \{A_{k\mu} e^{i[k, x]} + \bar{A}_{k\mu} e^{-i[k, x]}\} d^4 k$$

gegeben. Dabei ist

$$A_{k\mu} = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{(S)} j_\mu(z') e^{-i[k, z']} d^4 z' \text{ und } H(\alpha) = \frac{2}{\Gamma(\alpha/2) \Gamma(1-\alpha/2)} = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\alpha}{2}.$$

$D$  ist das vom Lichtkegel  $k_0 > 0$ ,  $[k, k] = 0$  begrenzte raumzeitliche Gebiet,  $S$  das gesamte raumzeitliche Gebiet.  $j_\mu(z')$  ist der Vierervektor der Stromdichte. Der Parameter  $\alpha$  ist beliebig. Das Integral der Definition konvergiert für  $\alpha < 0$ . Während die ursprüngliche Definition des Rieszschen Potentials mit  $\alpha \rightarrow 0$  in die Definition des Maxwell'schen Potentials übergeht, wird aus dem modifiziert definierten Rieszschen

Potential für  $\alpha \rightarrow 0$  das Wentzelsche Potential  $A_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\tau_0} v_\mu(z) \Delta(x-z) d\tau$  mit der „Heisenbergschen“ Deltafunktion  $\Delta(x) = |x|^{-1} \{\delta(x_0 - |x|) - \delta(x_0 + |x|)\}$ ,  $j_\mu(z') = e v_\mu \delta^4(z - z')$ . M. Pinl.

Riesz, Marcel: Sur le potentiel retardé attaché à un courant continu. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2260—2261 (1952).

L'A. généralise les résultats donnés dans une note précédente (ce Zbl. 47, 345) et relatifs au potentiel engendré par une particule, en construisant le potentiel-vecteur retardé d'ordre  $\alpha$  soit  $A^\alpha(x)$  pour un vecteur-courant continu  $j$  satisfaisant à l'équation de continuité  $\text{div } j = 0$ . Utilisant le formalisme d'un mémoire antérieur (ce Zbl. 33, 276) on obtient une expression intégrale de  $A^\alpha(x)$  qui est évaluée plus complètement dans les cas  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 2$ . G. Petiau.

Plithides, C. G.: The parabolic case of linear partial differential equations of second order and the heat equation from an analytic point of view. Bull. Soc. math. Grèce 26, 75—106 und griechische Zusammenfassg. 107—108 (1952).



Dans l'introduction du présent travail sont en général exposés les résultats classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et, en particulier, de l'équation de la chaleur. Au chap. II l'A. s'occupe de la solution de l'équation de la chaleur  $u''_{yy} = u'_x$  mis sous la forme

$$(1) \quad u(x, y) = \varphi(y) + (x/1!) \varphi''(y) + \dots + (x^n/n!) \varphi^{(2n)}(y) + \dots$$

et fait observer que la série au second membre peut être divergente quoique la fonction  $\varphi(y)$  soit analytique; il en est ainsi p. ex. lorsque  $\varphi(y) = (1-y)^{-1}$  ( $y < 1$ ). La condition suffisante pour la convergence de (1) exposée dans le travail, est connue. Le problème aux limites, dont l'A. s'occupe au chap. III (no. 4) peut être considéré comme cas particulier du problème aux limites classique.

M. Krzyżański.

Miranda, C.: Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine, in  $n$  variabili indipendenti. Atti Accad. naz. Lincei, Memorie Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 3, 85—121 (1952).

Si consideri il sistema di equazioni alle derivate parziali lineari

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial u_{ih}}{\partial x_h} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} + f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

essendo  $a_{ik}$  ed  $f_i$  funzioni definite nel dominio limitato  $T$  di  $S_n$ . Esso fornisce la condizione di coniugio rispetto alla matrice  $\|a_{ik}\|$  della  $(n-2)$ -forma

$$\omega = \sum_{i < h} (-1)^{i+h} u_{ih} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{h-1} dx_{h+1} \dots dx_n$$

e dello scalare (forma di grado zero)  $v$ . Le  $a_{ik}$  siano continue in  $T$  e le  $f_i$  di quadrato integrabile. La forma quadratica  $\sum a_{ik}(x) \varphi_i \varphi_k$  sia definita positiva per ogni  $x$  di  $T$ . Assegnati i valori  $\bar{v}$  della  $v$  su  $FT$ , se la  $v$  è univocamente determinata, la  $\omega$  lo è meno dell'aggiunzione del differenziale esterno di una  $(n-3)$ -forma. Sia  $T$  ad unico contorno sufficientemente regolare. Supposto che  $\bar{v}$  verifichi su  $FT$  una condizione di Hölder e in una ulteriore ipotesi per le  $f_i$ , l'A. dimostra l'esistenza della  $v$  e, in conseguenza mercè la integrazione di una  $(n-1)$ -forma, della  $\omega$ . Per la  $v$  l'A. dimostra un teorema di unicità in una opportuna classe funzionale. Egli approssima le  $a_{ik}$  e le  $f_i$  mediante polinomi  $a_{ik}^{(m)}$  e  $f_i^{(m)}$  e risolve preventivamente il problema al contorno per il „sistema approssimante“, che si riconduce a quello di Dirichlet per l'equazione

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(m)} \frac{\partial v}{\partial x_k} + f_i^{(m)} \right] = 0. \quad \text{Dettane } v^{(m)} \text{ la soluzione, Egli dimostra che}$$

scelta una opportuna normalizzazione, la successione  $\{v^{(m)}\}$  è compatta e il suo elemento di compattezza  $v$  è la soluzione del problema iniziale. La dimostrazione dell'anzidetta compattezza si fonda su interessanti formole di maggiorazione della  $v^{(m)}$  nelle quali non interviene alcun elemento dipendente delle derivate prime delle  $a_{ik}^{(m)}$  e delle  $f_i^{(m)}$ . Ciò rende tali formole di per sé notevoli e sicuramente utili anche per altri problemi. La dimostrazione di esse non è semplice e viene giustamente definita dall'A. stesso „laboriosa e delicata“.

G. Fichera.

Miranda, Carlo: Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine, in  $n$  variabili indipendenti. Atti IV. Congr. Un. mat. Italia, 2, 156—160 (1953).

È un sunto dei risultati conseguiti nel lavoro sopra recensito. G. Fichera.

Fishel, B.: On two papers of Titchmarsh concerning eigenfunction expansions for partial differential operators of elliptic type. J. London math. Soc. 27, 496—500 (1952).

This is a continuation and partial modification of Titchmarsh's paper (th. Zbl. 43, 101):  $\Delta u + (\lambda - q(x, y))u = 0$  within  $D =$  a simply connected finite domain with a smooth boundary  $\Gamma$ ,  $u = 0$  on  $\Gamma$ .  $q(x, y)$  is assumed to be continuous together with 1<sup>st</sup> derivatives. Then any function, which is continuous together with 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> derivatives inside  $D$  and  $= 0$  on  $\Gamma$  can be expanded in a uniform and absolutely convergent Fourier series proceeding after the eigenfunctions. Similar results corresponding to  $u + p du/dn = 0$  on  $\Gamma$  are announced.

G. Borg.

**Avakumović, Vojislav G.:** Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 4, 95—96 (1952).

● **Spencer, D. C.:** On Green's operators. (Mimeographed lecture notes. Inst. Fluid Dynamics Appl. Math., Univ. Maryland, Lect. Ser. No. 24.) College Park: Univ. of Maryland 1952. 23 p.

Soient  $M^n$  une variété de Riemann  $C^\infty$ ,  $H^p$  l'espace des  $p$ -formes harmoniques de norme finie:  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\|\varphi\| < +\infty$ . L'A. considère quelques cas où il existe, pour toute valeur de  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$ , un opérateur de Green  $G^p = G$  tel que  $\Delta G\varphi = \varphi - H\varphi$ ,  $HG\varphi = 0$ , pour toute  $p$ -forme  $C^\infty$  et de norme finie;  $H\varphi$  désigne la projection dans  $H^p$ . Titres des divers paragraphes: 1. Uniformly smooth manifolds; 2. Compact manifolds; 3. The operator  $\Delta + s$ ,  $s > 0$ ; 4. On Green's operator on compact Kähler manifolds; 5. References. — La plupart des démonstrations sont omises et l'on renvoie, sp. pour 1 et 3 à Spencer (this Zbl. 53, 66). *Th. Lepage.*

**Spencer, D. C.:** A generalization of a theorem of Hodge. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 533—534 (1952).

Ein  $n$ -dimensionaler Riemannscher Raum  $M$  der Klasse  $C^\infty$  heiße gleichmäßig glatt, wenn es 1. eine Zahl  $\eta > 0$  gibt der Art, daß die geodätische Verbindung zweier Punkte eindeutig ist, sobald deren Entfernung  $\leq \eta$  ist, und 2. die Ableitungen der Ordnungen  $\leq 4$  des metrischen Fundamentaltensors nach den Riemannschen Normalenkoordinaten in gewissem Sinne gleichmäßig beschränkt sind. In einem gleichmäßig glatten und zugleich metrisch vollständigen Raume  $M$  gibt es zu beliebiger geschlossener  $q$ -Form  $\omega$  mit endlicher Norm genau eine harmonische Form endlicher Norm, welche auf allen  $q$ -Zyklen mit kompaktem Träger dieselben Perioden wie  $\omega$  hat, wobei harmonisch bei endlicher Norm sowohl durch  $\Delta\varphi = 0$  als auch durch die gleichwertigen Gleichungen  $d\varphi = 0$ ,  $\delta\varphi = 0$  definiert werden kann. Der Beweis wird in Aussicht gestellt. *E. Kähler.*

**Bochner, S.:** Laplace operator on manifolds. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 189—201 (1952).

Dans cette conférence, l'A. donne une synthèse intéressante de différents résultats de géométrie différentielle et d'Analyse obtenus par l'usage d'un „laplacien“ sur une variété différentiable que l'on peut toujours supposer  $C^\infty$ . Ce laplacien est un opérateur différentiel  $L$  d'ordre 2, autoadjoint par rapport à un élément de volume. Si la variété est riemannienne on peut adopter pour  $L$  l'opérateur  $\Delta$  de Laplace-Beltrami. Dans une première partie, l'A. indique les applications obtenues par lui-même à la géométrie différentielle globale: théorème de Myers-Bochner sur la nullité du premier nombre de Betti d'une variété riemannienne compacte orientable à courbure de Ricci définie positive, plongement analytique dans l'espace euclidien d'une variété analytique réelle munie d'une métrique analytique réelle. Une seconde partie porte sur les procédés stochastiques et les fonctions quasianalytiques, la variété envisagée et les coefficients de  $L$  étant analytiques réels. Si  $\varphi_{r\mu}$  est une fonction propre de  $L$  associée à la valeur propre d'ordre fini  $\lambda_r$ ,

la fonction  $G(t; x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-t\lambda_r} \sum_p \varphi_{r\mu}(x) \varphi_{r\mu}(y)$  définit un procédé stochastique stationnaire.

L'A. étudie aussi les fonctions  $f$  de classe  $C^\infty$  telles que  $\sum_{n=0}^{\infty} \max_x |L^n f(x)|^{-1/n} = \infty$ . Signalons enfin un théorème de Lelong pour une variété non compacte: toute fonction  $f$  pour laquelle  $(-1)^n L^n f \geq 0$  quel que soit  $n$  est une fonction analytique réelle. La fin de la conférence est principalement consacrée aux fonctions méromorphes sur une variété kählérienne et indique un résultat sur le problème additif de Cousin. *A. Lichnerowicz.*

● **Diaz, J. B.:** Inequalities and minimal principles in mathematical physics. (Mimeographed lecture notes. Inst. Fluid Dynamics Appl. Math., Univ. Maryland, Lect. Ser. No. 18.) College Park: Univ. of Maryland 1952. 55. p.

In questo lavoro, a carattere monografico, vengono esposti sistematicamente diversi metodi di calcolo per eccesso e per difetto di quegli integrali di forme quadratiche che in Fisica Matematica si associano alle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni differenziali lineari a derivate parziali, quali sono, ad esempio, l'integrale di Dirichlet e, più in generale, gli integrali di forme quadratiche associate alle forme bilineari che intervengono nelle identità di Green dei problemi al contorno per equazioni differenziali lineari. Allo scopo di unificare e semplificare l'esposizione di tali procedimenti, l'A. ricorre ad uno spazio lineare di vettori nel quale è intro-



dotto un prodotto scalare semidefinito positivo, tale cioè che il quadrato scalare di un vettore  $v$  possa essere nullo anche se  $v$  non è lo zero dello spazio lineare; in tale spazio viene dimostrata una serie di disuguaglianze, relative al quadrato scalare di un vettore, le quali discendono tutte da quelle classiche di Bessel e di Cauchy-Schwarz. Tali disuguaglianze vengono poi usate per stabilire delle formule per il calcolo approssimato per eccesso e per difetto dell'integrale di Dirichlet relativo alle soluzioni dei problemi di Neumann, di Dirichlet e misto per l'equazione di Laplace in due variabili, nonché dell'integrale dell'energia relativo a problemi d'elasticità in due e in tre dimensioni. Per ottenere tali formule l'A. ricorre all'introduzione di due spazi funzionali; un primo spazio è quello delle funzioni reali definite in un dominio piano  $D$  limitato e connesso e il prodotto scalare vi è definito al modo seguente:  $(f, g) = \int_D (f_x g_x + f_y g_y) dx dy$ , un secondo

spazio è quello delle coppie ordinate di funzioni reali definite nel dominio  $D$  e il prodotto scalare è:  $([f_1, g_1], [f_2, g_2]) = \int_D (f_1 f_2 + g_1 g_2) dx dy$ . Entrambi tali spazi possono riguardarsi, in modo ovvio, come spazi lineari con prodotto scalare semidefinito positivo. Per questa via l'A. ritrova con estrema semplicità classiche disuguaglianze relative alle soluzioni dei problemi di Dirichlet e di Neuman per l'equazione di Laplace; inoltre egli stabilisce, per la soluzione  $v$  del problema di Dirichlet:  $\Delta_2 v = 0$  in  $D - F\bar{D}$ ,  $v = f$  in  $F\bar{D}$ , la seguente disuguaglianza:

$$\left( \int_{F\bar{D}} f \left( \frac{dw}{ds} \right) ds \right)^2 \int_D (w_x^2 + w_y^2) dx dy \leq \int_D (v_x^2 + v_y^2) dx dy,$$

ove  $w$  è una arbitraria funzione non costante nel dominio connesso  $D$ . Vengono anche dimostrate disuguaglianze applicabili nel caso di problemi al contorno per equazioni non omogenee e con condizioni al contorno non omogenee. L. de Vito.

**Jones, D. S.: The behavior of the intensity due to a surface distribution of charge near an edge.** Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 440—454 (1952).

Die Arbeit behandelt die Singularitäten der Potentiale einfacher Flächenbelegungen und deren Ableitungen an den Ecken und Kanten regulärer Flächen. Auf Anwendungen aus dem Gebiet der elektromagnetischen Schwingungen und der akustischen Wellen wird hingewiesen. Claus Müller.

**Allen, A. C.: On positive harmonic functions.** Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 571—577 (1952).

Soit  $\Delta$  un domaine contenu dans le demi-plan  $\eta > 0$  de la variable  $z = \xi + i\eta$ , et dont la frontière contient le segment  $\eta = 0$ ,  $a \leq \xi \leq b$ ;  $w(z) = u + iv$  représente conformément  $\Delta$  sur le demi-plan  $v > 0$ . A toute fonction  $H(\xi, \eta)$  harmonique et positive dans  $\eta > 0$ , on fait ainsi correspondre une fonction  $h(u, v)$  harmonique dans  $v > 0$ . Désignant par  $dG$  et  $dg$  les mesures respectivement associées à  $H$  et  $h$  par la représentation de Poisson-Stieltjes généralisée, et par  $\xi = \varphi(u)$  la fonction inverse de  $w = w(\xi, 0)$  pour  $a < \xi < b$ , l'A. établit la formule

$$g(\beta) - g(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{1 + x^2}{1 + w^2(x)} w'(x) dG(x)$$

en supposant  $a < \varphi(\alpha) < \varphi(\beta) < b$ , et  $G$  continue en  $x = \varphi(\alpha)$ ,  $\varphi(\beta)$ , ce qui généralise un résultat de S. Verblunsky (ce Zbl. 31, 51). Dans le cas  $a = 0$ ,  $b = +\infty$ , cette formule est appliquée à l'étude asymptotique de  $G(x)$  quand  $x \rightarrow +0$ . J. Lelong.

**Komatu, Yûsaku: On functions harmonic in a circle, with special reference to Poisson representation.** Proc. Japan. Acad. 28, 342—346 (1952).

Soit  $u(z)$  harmonique dans  $|z| < 1$ , avec  $u(z) \rightarrow f(\varphi)$  presque partout quand  $z \rightarrow e^{i\varphi}$  angulairement; et soit  $u_0$  l'intégrale de Poisson de  $f(\varphi)$ . Si  $\int_0^{2\pi} |u(r e^{i\varphi})| d\varphi$  est borné dans  $0 \leq r < 1$ , la représentation classique de  $u$  permet d'établir la formule

$$u - u_0 = \int_{e_0} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} d\mu(\varphi)$$

$\mu$  étant la différence de deux mesures positives, et  $e_0$ , un ensemble de mesure nulle; d'où la condition pour que  $u = u_0$ . J. Lelong.

### Variationsrechnung:

**Manwell, A. R.: A method of variation for flow problems. II.** Quart. appl. Math. 9, 405—412 (1952).

Verf. verallgemeinert die Argumentation seiner ersten Mitteilung (vgl. dies. Zbl. 37, 350), indem er beliebige Ausbuchtungen in der Hodographenebene heranzieht. Außerdem bringt er die Resultate seiner Methode in eine Form, die sich für die praktische Anwendung eignet. Unter Umständen reduzieren sich die Integro-Differentialgleichungen, aus denen sich die Abbildung des Profils auf den Einheitskreis bestimmt, auf Differentialgleichungen. Auch für dreidimensionale Strömungsfelder sollen in einer späteren Arbeit ähnliche Gleichungen hergeleitet werden.

*E. Hölder.*

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

**Gagaev, B. M.:** Über die Existenz der Eigenwerte von Integralgleichungen, deren Kern eine ganze rationale Funktion eines Parameters ist. Ukrain. mat. Žurn. 4, 120—123 (1952) [Russisch].

Behandelt wird die Integralgleichung  $\varphi(x) = \int_a^b L(x, y, \lambda) \varphi(y) dy + f(x)$  mit einem Kern  $L(x, y, \lambda)$ , der eine ganze rationale Funktion vom Grade  $m$  des Parameters  $\lambda$  darstellt. Er soll im Quadrat  $a \leq x, y \leq b$  bezüglich  $x$  und  $y$  stetig sein oder nur solche Unstetigkeiten aufweisen, wie sie in der Fredholmschen Theorie der linearen Integralgleichungen zugelassen sind, und er soll in diesem Quadrat und für jeden Wert von  $\lambda$  aus einem abgeschlossenen Bereich der komplexen  $\lambda$ -Ebene beschränkt sein. Für diese Integralgleichungen gelten nach Chalilov, Über eine allgemeine Methode der Lösung der Eigenwertprobleme der Theorie der Schwingungen eines zweidimensionalen elastischen Systems (Trudy Sekt. mat., Akad. Nauk Azerbaidžansk. SSR, 1946) viele Resultate der Fredholmschen Theorie, jedoch kann der Fredholmsche Nenner  $\delta(\lambda)$  identisch verschwinden, in welchem Fall die Gleichung für keine Funktion  $f(x)$  für keinen Wert von  $\lambda$  eine Lösung besitzt. Gestützt auf diese Ergebnisse wird der Beweis folgenden Satzes skizziert: Wenn  $\delta(\lambda)$  nicht identisch verschwindet, ist zur Nichtexistenz eines Eigenwertes des Kernes  $L(x, y, \lambda)$  notwendig und hinreichend, daß für  $\lambda = 0$  alle Ableitungen nach  $\lambda$  des Ausdrucks  $\int_a^b R(x, x, \lambda) dx$ , angefangen von der Ordnung  $2m + 1$ , verschwinden.  $R(x, y, \lambda)$  bedeutet dabei die Resolvente der Gleichung. Es ist dieses eine Verallgemeinerung eines von Lalesco aufgestellten Satzes [Introduction à la théorie des équations intégrales (Paris 1912), p. 31—32], der sich hieraus im Falle  $m = 1$  und  $L(x, y, 0) = 0$  ergibt. Aus dem verallgemeinerten Satz wird anschließend eine Reihe hinreichender Bedingungen für die Existenz mindestens eines Eigenwertes für spezielle Arten von Kernen  $L(x, y, \lambda)$  mit obigen Eigenschaften abgeleitet.

*E. Svenson.*

**Henze, Ernst:** Über die Lösung einer Klasse von linearen Eigenwertproblemen mittels Störungsrechnung. Wiss. Z. Univ. Rostock, Reihe Math. Naturw. 1, 1—14 (1952).

Die zum allgemeinen Eigenwertproblem  $F(y) = \lambda G(y)$  ( $F, G$  lineare selbst-adjungierte Differentialoperatoren) gehörende Integrodifferentialgleichung wird in eine lineare homogene Integralgleichung 2. Art umgeformt. Der Kern setzt sich aus einem symmetrischen Teil  $K(x, \xi)$  und einem unsymmetrischen Teil  $M(x, \xi)$  zusammen. Für die Integralgleichung mit dem Kern  $K(x, \xi) + \tau M(x, \xi)$  wird eine Störungsrechnung durchgeführt. Zur Erzielung numerischer Ergebnisse mittels des bekannten Iterationsverfahrens für den kleinsten Eigenwert werden trigonometrische Polynome als Ansatzfunktionen verwendet. Es wird bewiesen, daß die für die Eigenfunktionen des Kernes  $K + \tau M$  erhaltenen Reihen absolut und beständig konvergent in  $\tau$  sind. Somit ergibt sich für  $\tau = 1$  die Lösung des Ausgangsproblems, falls in den Randbedingungen das Verschwinden der  $n - 1$  niedrigsten Ableitungen an



beiden Rändern enthalten ist ( $n$  Ordnung von  $G$ ). Ein Beispiel wird durchgerechnet, bei dem  $G$  aus zwei Gliedern besteht (Zweigliedklasse). *K.-H. Bachmann.*

**Doetsch, Gustav: Ungelöste Probleme in der Theorie der Laplace-Transformation.** Symposium problem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 169—176 (1952) [Spanisch].

I. Die bisher nicht gelungene Charakterisierung der Klasse der Laplace-Transformierten durch innere funktionentheoretische Eigenschaften kann nur durch eine passende Verallgemeinerung der Laplace-Transformation erreicht werden. Zur Vorklärung dieses Problems werden folgende Klassen definiert:  $K_{II}^1$  = Klasse aller in einem

Streifen konvergenten zweiseitigen Laplace-Transformierten  $f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt =$

$\mathfrak{L}_{II}\{F\}$ .  $K_{II}^2$  = Klasse aller  $f(s) = f(x + iy)$ , die in einem Streifen analytisch und gleich  $o(y)$  für  $|y| \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $x$  sind.  $K_{II}^3$  = Klasse der in einem Streifen analytischen  $f(s)$ , die durch ihr Cauchysches Integral (erstreckt über zwei Vertikale) darstellbar sind.  $K_{II}$  = Klasse aller  $f(s)$ , die in einem Streifen als limes

einer Schar von  $\mathfrak{L}_{II}$ -Transformierten darstellbar sind. Es wird bewiesen:  $K_{II}^1 \subset K_{II}^2 \subset K_{II}^3 \subset K_{II}$ . Definiert man die entsprechenden Klassen  $K_I^1, \dots$  für die ein-

seitige Laplace-Transformation  $\mathfrak{L}_I$ , so ist  $K_I^1 \subset K_I^2$ ,  $K_I^1 \subset K_I^3$  und  $K_I^3 \subset K_I$ , aber nicht  $K_I^2 \subset K_I^3$ . Bei Gelegenheit der Untersuchung, welcher Teil von  $K_I^2$  in  $K_I^3$  enthalten ist, ergibt sich: Während  $f(s) = f(s_0 + r e^{i\varphi}) = \mathfrak{L}_I\{F\}$  für  $r \rightarrow \infty$  in jedem Winkelraum  $|\varphi| \leq \varphi_0 < \pi/2$ , aber nicht notwendig in den Winkelräumen  $\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi/2$  gegen 0 strebt, strebt der auf Kreisbogen genommene Mittelwert

von  $f(s)$  in diesen Winkelräumen stets gegen 0:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \int_{-\varphi_0}^{-\pi/2} + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \right) f(s_0 + r e^{i\varphi}) d\varphi = 0$ .

II. Der Bereich der Cesàroschen Summierbarkeit von  $\mathfrak{L}_I\{F\}$  läßt sich auf einfache Weise durch das funktionentheoretische Verhalten von  $f(s)$  bestimmen, dagegen ist bezüglich der gewöhnlichen Konvergenz kein ähnliches Resultat bekannt. Als Teilprobleme in dieser Richtung werden angeführt: 1. Für welchen Typus der Singularität von  $f(s)$  in  $s = \infty$  konvergiert  $\mathfrak{L}_I\{F\}$  in der ganzen Holomorphiehalbebene? 2. Welche Beziehung besteht zwischen dem Abstand der Ränder der Holomorphie- und der Konvergenzebene und dem Typus der Singularität von  $f(s)$  in  $s = \infty$ ? Als Instrument zur Untersuchung dieser Probleme wird die Darstellung des Partialintegrals von  $\mathfrak{L}_I\{F\}$  durch  $f(s)$  genannt:

$$\int_0^T e^{-st} F(t) dt = f(s) + \text{V. P.} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} e^{T(\sigma - s)} \frac{f(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma$$

mit  $\Re s > x_0 > \eta_1$  = Abszisse, bis zu der  $f(x + iy) = o(y)$  für  $|y| \rightarrow \infty$  ist. (Autoreferat.)

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Kaplan, Samuel: Cartesian products of reals.** Amer. J. Math. 74, 936—954 (1952).

La presque totalité de cet article consiste en propriétés bien connues, ou conséquences immédiates de propriétés connues de la théorie des espaces vectoriels topologiques: les démonstrations de l'A. n'ont même pas le mérite, pour la plupart, de simplifier les démonstrations connues. Par exemple, la condition de linéaire compacité qu'il donne pour les espaces localement convexes est évidente, si on remarque que les variétés linéaires faiblement et fortement fermées sont les mêmes dans un tel espace  $E$ , et en outre que si  $E'$  est le dual de  $E$ , la topologie faible  $\sigma(E, E')$  sur  $E$  donne les mêmes variétés linéaires fermées, que le corps des scalaires soit pris discret ou avec la topologie usuelle [cf. J. Dieudonné, C. r. Acad. Sci., Paris 216, 713—715 (1943)]. De même, dans l'Appendice, l'A. démontre une conséquence immédiate du théorème du graphe fermé (de Banach), au moyen d'une conséquence tout aussi immédiate du même théorème, qu'il

attribue à Lorch et Kober! La bibliographie est d'ailleurs incomplète; le travail de G. Köthe sur le même sujet (ce Zbl. **31**, 406) n'est même pas cité. Le seul résultat de ce travail qui présente quelque intérêt est la démonstration du fait que la topologie localement convexe la plus fine est complète; la seule démonstration connue jusqu'ici était indirecte et résultait du th. de Grothendieck (ce Zbl. **37**, 80).

J. Dieudonné.

**Shimoda, Isae:** Notes on general analysis. I. J. Gakugei Coll., Tokushima Univ., natur. Sci. **2**, 13—20 (1952).

This paper is in part a sequel to an earlier paper by the same author [J. Gakugei Coll., Tokushima Univ., natur. Sci. **1**, 1—5 (1950)]. In this earlier paper some theorems were proved about the behavior, on the boundary of the sphere of analyticity, of a power series (of homogeneous polynomials) with variable and values in complex Banach spaces. This paper makes a slight extension of the earlier work. It also contains theorems about the radius of analyticity of the series obtained by term-by-term Fréchet differentiation, and about the radius of analyticity of the power series development of  $f(x)$  about  $x_0$  if  $x_0$  is inside the sphere of analyticity with center at 0. The last section of the paper deals with the function  $f(x, y)$ , where  $x, y$  and the function values all lie in complex Banach spaces. A direct proof is given that if  $f$  is analytic in each variable separately, and bounded on each compact subset of its domain of definition, then  $f$  is analytic in  $x$  and  $y$  jointly. This generalizes a theorem of Osgood. It leads to an alternative proof of the generalized Hartogs theorem [see M. A. Zorn, Ann. of Math., II. Ser. **46**, 585—593 (1945), esp. p. 593].

A. E. Taylor (Math. Rev. **14**, 766).

**Putnam, Calvin R. and Aurel Wintner:** The orthogonal group in Hilbert space. Amer. J. Math. **74**, 52—78 (1952).

Die Verf. untersuchen die Struktur der Gruppe  $\Omega$  aller orthogonalen Transformationen in einem reellen separablen Hilbertschen Raum. Es wird eine Reihe von Resultaten bewiesen, die die weitgehende Verschiedenheit von  $\Omega$  von der orthogonalen Gruppe eines eindimensionalen Raumes illustrieren. Typische Sätze: 1. Ein Element von  $\Omega$  ist eine Drehung, wenn es in der Form  $e^S$  ( $S$  eine beschränkte, schiefsymmetrische Transformation) darstellbar ist. Es bezeichne  $\Omega_0$  die Menge der Drehungen; ein Element von  $\Omega - \Omega_0$  wird eine Spiegelung genannt. Man zeigt, daß das Produkt von zwei Drehungen wie das von zwei Spiegelungen wieder eine Spiegelung geben kann. 2.  $\Omega_0$  und  $\Omega - \Omega_0$  enthalten beide solche Elemente, welche in der abgeschlossenen Hülle der komplementären Mengen  $\Omega - \Omega_0$  und  $\Omega_0$  liegen ( $\Omega$  wird als ein metrischer Raum in der gleichmäßigen Topologie betrachtet). 3. Die Menge  $[\Omega]$  der Elemente  $0 \in \Omega$ , für die  $\|I - 0\| = 2$  wie auch die komplementäre Menge  $\Omega - [\Omega]$  sind bogenmäßig zusammenhängend.

L. Pukaŋszky.

● **Dieudonné, J.:** Harmonische Analyse. Vorlesungsaufzeichnungen, redigiert von J. Abdelhay. (Publ. Nr. 9. Ser. A.) Rio de Janeiro: Faculdade Nacional de Filosofia, Universidade do Brasil 1952. III, 212 S. [Portugiesisch].

C'est un excellent livre contenant les leçons d'Analyse harmonique professées par l'Auteur à l'Université du Brésil. — Le chapitre I commence par un court aperçu historique de l'analyse harmonique, et continue par l'étude des groupes abéliens d'ordre fini: algèbre de groupe, caractères, dualité, transformée de Fourier, théorèmes de Plancherel et de Bochner. L'Auteur montre progressivement comment ces choses se transposent pour le groupe  $\mathbb{Z}$  des entiers, le groupe multiplicatif  $U$  des nombres complexes de module 1, et le groupe additif  $R$  des nombres réels, en montrant les restrictions qui s'imposent dans les définitions de l'algèbre de groupe et des caractères. Le chapitre II contient des éléments de la théorie des fonctions vectorielles holomorphes, la théorie élémentaire des algèbres de Banach commutatives à élément unité, des éléments de la théorie des opérateurs (continus) d'un espace hilbertien, le théorème de Gelfand-Neumark sur la représentation des algèbres de Banach commutatives et involutives formées d'opérateurs d'un espace hilbertien. L'A. expose ensuite les principaux résultats de la théorie de la mesure de Radon sur un espace localement compact, les mesures spectrales associées à une algèbre de Banach commutative, involutive, à élément unité, formée d'opérateurs d'un espace hilbertien et le théorème de représentation spectrale des opérateurs hermitiens. Le chapitre III est consacré à l'étude d'une algèbre commutative  $A$ , involutive ( $x \rightarrow \tilde{x}$ ) sur laquelle est définie une forme linéaire  $f$  de type positif, telle que  $f(x\tilde{x}) = 0$  implique  $x = 0$  (le cas général est réduit à celui-ci). On associe à  $A$  et  $f$  un espace hilbertien  $E$ . Si  $f$  est unitaire (pour chaque  $x \in A$  il existe une constante  $M_x$  telle que  $f(x\tilde{x}y\tilde{y}) \leq M_x f(y\tilde{y})$  quel que soit  $y \in A$ ),  $A$  est isomorphe à une algèbre d'opérateurs sur  $E$ . Par l'intermédiaire du théorème de Gelfand-Neumark, on démontre le théorème de Plancherel sous une forme due à Godement: (1)  $A$  est isomorphe à une algèbre de fonctions complexes continues  $\hat{x}$



sur un espace localement compact  $\Sigma$ , qui sont nulles à l'infini si  $\Sigma$  n'est pas compact; (2) il existe une mesure  $\mu \geq 0$  sur  $\Sigma$ , de support  $\Sigma$ , telle que  $\hat{x} \in L^2(\mu)$  pour tout  $x \in A$  et  $f(xy) = \int \hat{x} \hat{y} \hat{z} d\mu$ ; (3) si  $f$  est non dégénérée ( $\langle xy, a \rangle = 0$  quels que soient  $x, y \in A$  implique  $a = 0$ ), alors  $f(x, y) = \int \hat{x} \hat{y} d\mu$  et  $E$  est isomorphe à  $L^2(\mu)$ . Le chapitre IV contient l'analyse harmonique sur un groupe abélien localement compact  $G$ . L'A. appelle algèbre du groupe  $G$ , l'algèbre  $M^1(G)$  des mesures de Radon sur  $G$  bornées, avec le produit de composition. L'ensemble  $L^1(G)$  des fonctions  $f$  intégrables pour la mesure de Haar  $dx$  est identifié avec un idéal fermé de  $M^1(G)$ . Les caractères (homomorphismes) de  $L^1(G)$  sont les restrictions à  $L^1(G)$  des caractères de  $M^1(G)$  qui ne sont pas identiquement nuls sur  $L^1(G)$ . Il y a une correspondance biunivoque entre les caractères  $\chi_0$  de  $G$  et les caractères  $\chi$  de  $L^1(G)$  par la formule:  $\chi(f) = \int \chi_0(s) f(s) ds$ , ( $f \in L^1(G)$ ). Pour tout  $\mu \in M^1(G)$  on a alors  $\chi(\mu) = \int \chi_0(s) d\mu(s)$ . La transformée de Fourier d'une mesure  $\mu \in M^1(G)$  est une fonction  $\hat{\mu}$  définie sur le dual  $\hat{G}$  de  $G$ , telle que  $\hat{\mu}(\hat{x}) = \int \langle x, \hat{x} \rangle d\mu(x)$ . La transformée de Plancherel d'une mesure de type positif (mesure qui est en même temps une forme de type positif sur l'algèbre  $K(G)$  des fonctions continues à support compact sur  $G$ , avec le produit de composition  $f * g$ ) est une mesure  $\hat{\mu}$  sur  $\hat{G}$ , qui s'obtient par intermédiaire du théorème de Plancherel-Godement et l'on a la formule générale de Plancherel:  $\mu(f * g) = \int \hat{f}(\hat{x}) \hat{g}(\hat{x}) d\hat{\mu}(\hat{x})$ , pour  $f, g \in K(G)$ . La transformée de Plancherel de la mesure  $\epsilon_x$  est la mesure de Haar  $d\hat{x}$  sur  $\hat{G}$ . Le théorème de Plancherel proprement dit en résulte:  $\int f(x) \overline{g(x)} dx = \int \hat{f}(\hat{x}) \overline{\hat{g}(\hat{x})} d\hat{x}$ . D'autres résultats importants sont aussi obtenus de cette manière, comme par exemple la formule de réciprocité de Fourier et le théorème de dualité de Pontrjagin. Le livre suppose certaines connaissances spéciales d'analyse fonctionnelle telles que: mesure de Radon et mesure de Haar, par exemple. Le livre est remarquable par la clarté de l'exposition et par la manière originelle de traiter les problèmes. G. Marinescu.

**Malliavin, Paul:** Sur l'analyse spectrale des fonctions non bornées. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1021—1024 (1952).

Sei  $G$  eine lokal kompakte abelsche Gruppe und  $C$  der lokal konvexe Vektorraum der stetigen komplexwertigen Funktionen auf  $G$  mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von  $G$ . Eine überall positive Funktion  $\varphi \in C$  heißt regulär exponentiell wachsend (à croissance exponentielle régulière), wenn eine Nullumgebung  $V$  in  $G$  und eine positive Konstante  $B$  existieren, derart, daß  $\varphi(x+z) < B\varphi(x)$  ist für alle  $x \in G$  und alle  $z \in V$ . Eine Funktion  $f \in C$  heißt exponentiell wachsend, wenn  $|f|$  durch eine regulär exponentiell wachsende Funktion majorisiert wird. Satz: Ist  $f$  von Null verschieden und exponentiell wachsend, so enthält der von den Funktionen  $f_t(x) = f(x-t)$ ,  $t \in G$ , erzeugte, abgeschlossene Untermodul  $F$  einen stetigen Homomorphismus von  $G$  in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen. Zum Beweis wird mit Hilfe der  $f$  majorisierenden regulär exponentiell wachsenden Funktion  $\varphi$  in der Algebra  $M$  der Maße mit kompakten Trägern in  $G$  eine Norm definiert.  $M$  ist der zu  $C$  duale Modul und der Annulator  $J$  von  $F$  ist ein Ideal in  $M$ . Sind  $\bar{M}$  und  $J$  die Hüllen von  $M$  und  $J$  bezüglich der durch  $\varphi$  definierten Norm, so ist  $J$  ein eigentliches reguläres Ideal und aus einem Homomorphismus der Banachalgebra  $\bar{M}/J$  auf die komplexen Zahlen kann man dann den gewünschten Homomorphismus aus  $F$  erhalten. Spezialfall des Satzes: Wächst der Betrag der stetigen komplexwertigen Funktion  $f(x)$  auf dem euklidischen  $R^n$  höchstens wie  $e^{\alpha|x|}$  mit geeignetem festen positiven  $\alpha$ , so gibt es eine Linearform  $(a, x)$ , derart, daß  $e^{(a, x)}$  auf jedem kompakten Teil von  $R^n$  gleichmäßig durch Linearkombinationen aus Funktionen  $f_t(x) = f(x-t)$  approximiert wird. H. Leptin.

**Helson, Henry:** Spectral synthesis of bounded functions. Ark. Mat. **1**, 497—502 (1952).

Es sei  $G$  eine lokal kompakte abelsche Gruppe. Es handelt sich um das Problem, wann eine auf  $G$  definierte beschränkte meßbare Funktion  $\varphi$  schwacher Grenzwert von Linearkombinationen von Charakteren ist, die dem Spektrum  $A_\varphi$  von  $\varphi$  angehören. Dies ist bekanntlich dann der Fall, wenn  $G$  die reelle Zahlengerade ist und die Begrenzung von  $A_\varphi$  abzählbar (oder reduzibel) ist, weiter nach Kaplansky (dies. Zbl. **32**, 29) für beliebiges  $G$  dann, wenn  $A_\varphi$  einelementig ist. Verf. gibt zunächst einen neuen, einfachen Beweis für diesen Satz von Kaplansky. Sodann erweitert er den erstgenannten Satz auf beliebige  $G$ , dabei einen von Beurling stammenden (unveröffentlichten) Beweisgedanken verallgemeinernd. Schließlich wird gezeigt, daß man hierbei die schwache Topologie durch gewisse stärkere Topologien ersetzen kann. H. König.

**Helson, Henry:** On the ideal structure of group algebras. Ark. Mat. **2**, 83—86 (1952).

Es sei  $G$  eine lokal kompakte abelsche Gruppe,  $\hat{G}$  ihre duale Gruppe und  $\mathfrak{L}$  die Gruppenalgebra von  $G$ . Jedes abgeschlossene Ideal  $\mathfrak{I}$  von  $\mathfrak{L}$  definiert eine Teilmenge von  $\hat{G}$ , die gemeinsame Nullstellenmenge der Fouriertransformierten aller in  $\mathfrak{I}$  enthaltenen Funktionen. Es ist bekannt,

daß verschiedene  $\mathfrak{J}$  die gleiche Nullstellenmenge definieren können. Verf. beweist in der vorliegenden Note, daß es in diesem Falle unendlich viele solcher Ideale  $\mathfrak{J}$  mit dieser Nullstellenmenge gibt. Der Beweis beruht wesentlich auf Untersuchungen von Godement (dies. Zbl. **33**, 376).

H. König.

**Mautner, F. I.: Induced representations.** Amer. J. Math. **74**, 737—758 (1952).

Soit  $G$  un groupe localement compact, unimodulaire et séparable,  $K$  un sous-groupe compact de  $G$  et  $u: x \rightarrow u_x$  une représentation unitaire continue de  $K$  dans un espace hilbertien  $H$ . Désignons par  $L_H^2$  l'espace hilbertien des fonctions définies sur  $G$  à valeurs dans  $H$ , de puissance 2-ième intégrable par rapport à la mesure de Haar de  $G$  et par  $H_1$  le sous-espace hilbertien de  $L_H^2$  formé des fonctions  $f$  telles que  $f(xy^{-1}) = u_y f(x)$  pour  $x \in G, y \in K$ . Si on pose  $U_x f(y) = f(x^{-1}y)$  pour  $x, y \in G$  et  $f \in H_1$ ,  $U: x \rightarrow U_x$  est une représentation unitaire continue de  $G$  dans  $H_1$ , appelée représentation induite par  $u$ . Soit  $W$  l'algèbre de von Neumann engendrée par les

opérateurs  $U_x (x \in G)$ ,  $Z$  son centre et  $H_1 = \int^{\oplus} H_1(t) dm(t)$  la décomposition de  $H_1$  en intégrale hilbertienne par rapport à  $Z$ . Pour tout  $t$  il existe une représentation

unitaire continue  $V_t: x \rightarrow V_x(t)$  telle que  $U_x = \int^{\oplus} V_x(t) dm(t)$  pour tout  $x \in G$ . Le principal résultat de ce mémoire est le théorème suivant: Soit  $V(t, K)$  la restriction à  $K$ , de la représentation  $V(t)$ . Alors la multiplicité de  $u$  dans  $V(t, K)$  est égale à la dimension de (l'espace vectoriel)  $\{V_x(t) | x \in G\}'$ . La démonstration repose sur un grand nombre de lemmes, dont la plupart ont leur propre intérêt. C. Ionescu Tulcea.

**Wendel, J. G.: Left centralizers and isomorphisms of group algebras.** Pacific J. Math. **2**, 251—261 (1952).

L'A. commence par caractériser, dans l'algèbre de Banach  $L(G)$  des fonctions intégrables pour la mesure de Haar sur un groupe localement compact  $G$  (la multiplication dans  $L(G)$  étant la convolution), les opérateurs continus qui commutent avec les multiplications à gauche  $y \rightarrow x * y$ . Comme il fallait s'y attendre (d'après le cas abélien classique connu, non seulement pour les fonctions, mais aussi pour les distributions) ces opérateurs sont les opérateurs de convolution à droite  $x \rightarrow x * \mu$  par une mesure de Radon bornée. Ils préservent la norme si et seulement si  $\mu$  est une mesure ponctuelle, et tout opérateur  $x \rightarrow x * \mu$  est limite (pour la topologie forte des opérateurs de combinaisons linéaires de tels opérateurs particuliers. Utilisant ces résultats, l'A. résout ensuite complètement le problème de la caractérisation des isomorphismes algébriques de  $L(G)$  sur  $L(G')$  ( $G, G'$  groupes localement compacts) soumis à la condition supplémentaire de ne pas augmenter la norme; l'existence d'un tel isomorphisme  $T$  entraîne que  $G$  et  $G'$  sont isomorphes, et que  $T$  est en fait une isométrie.

J. Dieudonné.

**Dixmier, J.: Sur un théorème d'Harish-Chandra.** Acta Sci. math. **14**, 145—156 (1952).

Eine Liesche Algebra  $\mathfrak{a}$  über einem Körper der komplexen Zahlen  $C$  sei als Modul direkt zerlegt in ein Ideal  $\mathfrak{g}$  und einen halbeinfachen Unterring  $\mathfrak{h}$ .  $A, G \subseteq A, H \subseteq A$  seien die assoziativen Hüllen von  $\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ ; ferner  $X, Z$  die Zentralisatoren von  $H, A$ . Mit  $\delta$  seien irreduzible endlich-dimensionale Darstellungsklassen von  $\mathfrak{h}$  bezeichnet. Gegeben sei ferner ein Modulhomomorphismus  $\chi: G \cap X \rightarrow C$ . Theorem. Es gibt nur endlich viele inäquivalente Darstellungen  $\pi$  von  $\mathfrak{a}$  mit  $\pi = \chi \cdot 1$  auf  $G \cap X$ , deren Einschränkungen  $\pi_{\mathfrak{h}}$  auf  $\mathfrak{h}$  ein gegebenes  $\delta$  enthält; für solche  $\pi$  gilt  $\pi_{\mathfrak{h}} = \sum n_{\delta} \cdot \delta$  ( $n_{\delta} < \infty$ ), und es ist  $\pi$  auf  $Z$  skalar. Dies ist eine leichte Verallgemeinerung eines Theorems von Harish-Chandra (dies. Zbl. **42**, 127). Der hier gegebene Beweis ist kürzer und benutzt nicht die Cartanschen Unterhalbgebren. Ernst Witt.

**Segal, I. E.: Hypermaximality of certain operators on Lie groups.** Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 13—15 (1952).

Let  $G$  be a connected Lie group. Let  $L$  be the Lie algebra of  $G$  and  $E$  the enveloping algebra of  $L$ . Let  $U(a)$  be a strongly continuous unitary representation of  $G$  in a Hilbert space  $H$ , and denote by  $D$  the dense linear variety in  $H$  consisting of the sums of the elements  $\int_G U(a) x f(a) da$  ( $x \in H, f(a) \in C^{\infty}$  vanishing outside of a compact set of  $G$ , integral taken with respect to Haar measure on  $G$ ). To every  $X \in L$  there corresponds an operator  $dU(X)$ , which is essentially hypermaximal



symmetric on  $D$ , by the condition  $U(\exp X) = \exp(i[dU(X)]^*)$  (Segal, this Zbl. 45, 386). If  $p$  is a symmetric polynomial in the center of  $E$ , then the corresponding polynomial in the operators  $dU(X)$  is essentially hypermaximal symmetric on  $D$ , [a polynomial in  $E$  is called symmetric, if it is invariant under the mapping, which carries the monomial  $X_1 X_2 \cdots X_n$  into  $(-1)^n X_n X_{n-1} \cdots X_1$ ]. *L. Pukánszky.*

**Mostow, G. D.:** On the  $L^2$ -space of a Lie group. *Amer. J. Math.* 74, 920—928 (1952).

The main result of the paper states, that the  $L^2(G)$  space of a Lie group  $G$  has a base, which consists of analytic functions on  $G$  (Theorem 3). To establish this, it is proved, that any Lie group is analytically the product of a compact subgroup  $K$  and of an euclidean space  $E$ , and that Haar measure on  $G$  can be decomposed into the product of Haar measure on  $K$  and of ordinary euclidean measure on  $E$  (relative to suitable coordinates; Theorem 1). It is also proved, that a Lie group can be imbedded analytically in a euclidean space with a non-vanishing Jacobian (Theorem 2).

*L. Pukánszky.*

**Singer, I. M.:** Uniformly continuous representations of Lie groups. *Ann. of Math.*, II. Ser. 56, 242—247 (1952).

Main result: Any uniformly continuous representation of a Lie group in a Hilbert space is finite dimensional.

*W. T. van Est.*

**Gel'fand, I. M. und M. I. Graev:** Die unitären Darstellungen der reellen einfachen Lieschen Gruppen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 86, 461—463 (1952) [Russisch].

Die Untersuchung der unitären Darstellungen reeller halbeinfacher Gruppen beruht auf den Resultaten für die komplexen Gruppen. Die Methode wird an der unimodularen Gruppe erklärt. Ausführliche Auseinandersetzung s. die in diesem Zbl. 52, 341 angegebene Literatur, betr. engl. Übersetzung s. dies. Zbl. 70, 261.

*H. Freudenthal.*

**Gel'fand, I. M. und M. I. Najmark:** Die unitären Darstellungen der unimodularen Gruppe, die eine identische Darstellung der unitären Gruppe enthalten. *Trudy Moskovsk. mat. Obšč.* 1, 423—475 (1952) [Russisch].

Die Verf. beschäftigen sich mit denjenigen irreduziblen unitären Darstellungen der unimodularen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , deren Beschränkung auf die unitäre Untergruppe  $\mathfrak{U}$  einen invarianten Vektor besitzt (Darstellung der „Klasse 1“). Neben dem Gruppenring  $R$  (Menge der  $\lambda e + x$ , wo  $x$  eine summierbare Funktion auf  $\mathfrak{G}$  und  $e$  eine Eins ist) spielt eine Rolle der Unterring  $R_0$ , der von den auf den Rechts- und Linksnebenklassen von  $\mathfrak{U}$  konstanten Funktionen erzeugt wird. In  $R$  ist die übliche Multiplikation (Faltung), Konjugation und Norm definiert.  $R_0$  kann auch als Menge der  $\lambda e + x$  betrachtet werden, wo  $x$  nun eine auf der Untergruppe  $E$  der Diagonalmatrizen  $\varepsilon$  mit positiven Elementen definierte Funktion ist; die Norm wird dann  $|\lambda| + \frac{c}{n!} \int |x(\varepsilon)| \omega(\varepsilon) d\mu(\varepsilon)$ , wo  $\omega(\varepsilon) = \prod_{p < q} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2)^2$  und  $c$  eine positive Konstante ist.  $R_0$  ist kommutativ. Ist zu der Darstellung  $T$  der Klasse 1  $f_0$  der (im wesentlichen einzige) normierte, bei  $\mathfrak{U}$  invariante Vektor, so heißt  $\varphi$  mit  $\varphi(g) = (T_g f_0, f_0)$  die zu  $T$  gehörige Kugelfunktion (eine, wie mir scheint, schiefe Übertragung einer klassischen Bezeichnung).  $\varphi$  charakterisiert  $T$  bis auf Äquivalenz.  $\varphi$  ist auf Rechts- und Linksnebenklassen von  $\mathfrak{U}$  konstant. Zu  $T$  gehört weiter ein Homomorphismus  $\tau$  (von  $R_0$  in den komplexen Körper), der  $\lambda e + x$  abbildet auf

$$\lambda + \frac{c}{n!} \int x(\varepsilon) \omega(\varepsilon) \varphi(\varepsilon) d\mu(\varepsilon),$$

dessen Kern ein maximales symmetrisches Ideal  $M$  von  $R_0$  ist. Für die Haupt- und Komplementärreihen haben die sphärischen Funktionen (bis auf einen konstanten Faktor) die Form  $\left( \prod_{p < q} (\varrho_q - \varrho_p) (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2) \right)^{-1} \det(\varepsilon_{\mu}^{i_{\nu}})_{\mu, \nu=1, \dots, n}$  mit für die be-

treffende Darstellung charakteristischen  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ . (Siehe dies. Zbl. 37, 15.) Die  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$  sind dann gewissen Bedingungen unterworfen. Läßt man sie frei (bis auf die Forderungen:  $\varrho_1 + \dots + \varrho_n = 0$  und  $\varphi$  beschränkt), so liefert dieselbe Formel alle Homomorphismen von  $R_0$  in den komplexen Körper. Die zusätzliche Forderung, daß  $\varphi$  symmetrisch und auf den Rechts- und Linksnebenklassen von  $\mathfrak{U}$  konstant sei, beschränkt die Systeme  $\varrho_1, \dots, \varrho_n$  in der Weise, daß gerade die der Haupt- und Komplementärreihen herauskommen, die also die Darstellungen der Klasse 1 erschöpfen. Zu einem maximalen symmetrischen Ideal von  $R_0$  gehört im allgemeinen eine nichttriviale eindimensionale  $*$ -Darstellung von  $R_0$ ; eine solche läßt sich nicht auf  $R$  fortsetzen. Ein  $\varphi$  wie oben definiert ein positives Funktional auf  $R_0$ ; das läßt sich im allgemeinen nicht zu einem positiven Funktional auf  $R$  fortsetzen.

*H. Freudenthal.*

\*Itô, Seizô: Unitary representations of some linear groups. Nagoya math. J. 4, 1—13 (1952).

Toscano, Letterio: Relazioni su gli operatori del tipo  $x_1 \partial/\partial x_1 + \dots + x_m \partial/\partial x_m$ . Bull. Inst. Politecn. Jassy 4, 196—202 (1949).

L'A. rileva numerose relazioni, per le quali rinviama al lavoro stesso.

*S. Cingini.*

Tillmann, Heinz-Günter: Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum. Diss. math.-naturw. Fakultät Münster 1, 18—20 (1952).

Arf, C.: On the methods of Rayleigh-Ritz-Weinstein. Proc. Amer. math. Soc. 3, 223—232 (1952).

### **Praktische Analysis:**

● Hartree, D. R.: Numerical analysis. Oxford: At the Clarendon Press 1952. XIV, 287 p. 30 s. net.

● Salvadori, Mario G.: Numerical methods in engineering. With a collection of problems by Melvin L. Baron. New York: Prentice-Hall Inc. 1952. XIII, 258 p. \$ 7,15.

This book is intended to introduce the elementary techniques of numerical methods which are needed in the solution of technical problems, and even in this restricted field, it only partially succeeds in its aim. The topics described are the following. (1) The solution of algebraic equations, principally by linear interpolation, and Newton's (and other's) methods of successive approximation. (2) The solution of simultaneous algebraic equations by the Gauss and Cholesky methods, by the iteration process of Gauss-Seidel, and by the method of relaxation. (3) Interpolation, the calculation of derivatives and the evaluation of definite integrals. Much of this chapter is based upon Taylor's series, and one looks in vain for a systematic exposition of finite differences. The interpolation formula considered is the Gregory-Newton; derivatives are expressed in Lagrange type formulae (using ordinates), and there is no examination in any of the examples of the neglected differences. Integrals are evaluated by the trapezoidal and Simpson rules; and to improve the simple approximations, Richardson's extrapolation process is used. (4) The solution of ordinary differential equations with initial boundary conditions. After describing the use of Taylor's series to calculate the first few values, the Adam's-Bashforth formula using backward differences and the procedures described by Fox and Goodwin (this Zbl. 33, 287) are explained. (5) The solution of ordinary differential equations with two-point boundary conditions. The use of step-by-step methods with assumed end conditions is outlined, but no distinction is made between linear and non-linear equations. The other procedures described involve the replacement of the differential operators by their finite-difference equivalents, and the solution of the resulting set of simultaneous equations by standard methods or by relaxation including the difference corrections of Fox. Richardson's extrapolation is used to improve the accuracy. The solution of characteristic-value problems is indicated. (6) The solution of partial differential equations (predominately of the elliptic kind). The finite difference representations of the differential operators are established, and these are used in the differential equations (Poisson's and the biharmonic) to obtain a set of simultaneous equations which are solved by direct methods or by relaxation, as (5) above. Curved boundaries with known boundary values, are treated, and the plastic-torsion problem and characteristic-value problems are considered. One example shows the solution of a heat-flow problem in two dimensions, and the use of other coordinates and triangular nets is described.

*D. C. Gilles. (Math. Rev. 16, 1154).*

Wasow, Wolfgang: Metodi probabilistici per la risoluzione numerica di alcuni problemi di analisi e di algebra. Rend. Mat. e Appl. 11, 336—346 (1952).



Die 1951 im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo gehaltenen Vorträge geben die Grundgedanken der von J. v. Neumann, Ulam u. a. entwickelten Monte-Carlo-Methoden, bei denen auf elektronischen Rechenmaschinen unter Verwendung von Zufallszahlen eine sehr große Anzahl von Irrfahrten in ihrem Verlauf durchgerechnet werden. Anwendungen dieser Methoden sind einmal komplizierte Diffusions- und Transportprobleme der Physik der Elementarteilchen, dann aber auch rein mathematische Probleme. Als Beispiele für letztere werden besprochen: 1. die dem Dirichletschen Problem für  $\Delta u = 0$  entsprechende finite Gleichung  $\Delta_h u = 0$  im quadratischen Gitter mit der Maschenweite  $h$  sowie Verallgemeinerungen der Form  $\frac{1}{2} \sum \beta_{ik}(P) \partial^2 u / \partial x_i \partial x_k + \sum \alpha_j(P) \partial u / \partial x_j = 0$ , 2. die Berechnung der reziproken zu einer gegebenen Matrix, 3. die Gleichung  $\Delta_h u + g(P) \cdot u = f(P)$  ( $u = 0$  auf dem Rand), 4. die Berechnung der Eigenwerte für  $\Delta_h u + g(P) \cdot u + \lambda u = 0$  ( $u = 0$  auf dem Rand). Es folgen kurze Hinweise und Literaturangaben für andere Anwendungen der Monte-Carlo-Methoden. G. Schulz.

**Rapoport, I. M.: Eine neue Methode zur angenäherten Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.** Ukrain. mat. Žurn. 4, 399—413 (1952) [Russisch].

$x(t)$  sei ein  $n$ -dimensionaler Vektor,  $A(t)$  eine Matrix  $n$ -ter Ordnung. Verf. betrachtet zur Lösung eines Systems von  $n$  gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen  $dx/dt = A(t)x$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $x(0) = \xi$  folgendes Näherungsverfahren. Es sei  $X_0(t)$  eine nichtsinguläre Matrix  $n$ -ter Ordnung, die zusammen mit ihrer ersten Ableitung in  $(0, T)$  stetig sei und für die  $X_0(0) = E$  gelte. Ausgehend von  $X_0(t)$  wird eine Folge von Matrizen  $X_m(t)$  konstruiert ( $m = 1, 2, \dots$ ), wobei  $X'_m(t) = A_{m-1}(t) X_m(t) + [A(t) - A_{m-1}(t)] X_{m-1}(t)$ ,  $X_m(0) = E$ ,  $A_{m-1}(t) = X_{m-1}^{-1}(t) X_{m-1}'(t)$  gilt. Setzt man  $X_m(t) = X_{m-1}(t) [E + Y_m(t)]$ , so ergibt sich

$$Y_m(t) = \int_0^t X_{m-1}^{-1}(t) [A(t) - A_{m-1}(t)] X_{m-1}(t) dt,$$

und man erhält schließlich

$$X_m(t) = X_0(t) [E + Y_1(t)] [E + Y_2(t)] \cdots [E + Y_m(t)].$$

Von der Folge der Vektoren  $x_m(t) = X_m(t) \xi$  wird bewiesen, daß sie in  $(0, T)$  gleichmäßig gegen die gesuchte Lösung  $x(t)$  konvergiert und daß, wenn unter der Norm einer Matrix der größte der absoluten Beträge ihrer Elemente verstanden wird, die Abschätzung  $\|x(t) - x_m(t)\| < 8n C \|\xi\| \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$  mit  $C = \max_{(0, T)} \|X_0(t)\|$  besteht. Anschließend wird der Fall eines Systems nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen untersucht. W. Schulz.

**Vorob'ev, Ju. V.: Eine Methode der numerischen Integration einer Klasse von Gleichungen der mathematischen Physik und ihre Anwendung auf Probleme der Elektronenoptik.** Žurn. techn. Fiz. 22, 1166—1173 (1952) [Russisch].

Die numerische Lösung gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung vom Typ  $y'' + Q(x)y = 0$  nach dem Verfahren der wiederholten Quadratur mittels integrierter Interpolationsformeln stößt dann auf Schwierigkeiten, wenn  $Q(x)$  Pole besitzt. Es werden Rechenformeln angegeben, welche eine numerische Integration in der Nachbarschaft eines Pols von höchstens zweiter Ordnung gestatten. Die genannte Schwierigkeit tritt beispielsweise bei der Lösung der Differentialgleichung der achsennahen Elektronenbahnen in elektrostatischen Linsen  $R'' + \frac{3}{16}(\Phi'/\Phi)^2 R = 0$  auf, wenn das Potential  $\Phi$  an einer Stelle in der Linse sehr klein wird. F. Lenz.

**Panov, D. Ju.: Über eine mechanische Quadraturformel.** Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 317—320 (1951) [Russisch].

Verf. bringt eine Verallgemeinerung der Simpsonschen Quadraturformel für nicht äquidistante Ordinaten mit Restgliedabschätzung:

$$J = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{6(d+d^2)} [y_0(2d+3d^2-d^4) + y_1(1+d)^4 + y_2(2d^3+3d^2-1)] + R,$$

$$R = -\frac{1}{72} (1 - d^2) (1 + d)^2 h^4 f'''(x_0) - \frac{1}{720} (4d^2 + 3d - 6) (1 + d)^3 h^5 f^{IV}(x_0),$$

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + h + dh; \quad \text{für } \varepsilon = d - 1 \quad \text{und} \quad |\varepsilon| \gg \varepsilon^2:$$

$$J = \frac{h}{3} \left[ y_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) + 4y_1 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) + y_2 \left( 1 + \frac{3\varepsilon}{2} \right) \right].$$

Im allgemeinen ist seine Formel weniger genau, doch lassen sich für die Wahl der Ordinaten Bereiche angeben, für welche eine wesentlich größere Genauigkeit erzielt wird, als mit der Simpsonschen Formel.  $d_{\text{opt.}} = \frac{1}{8} (\sqrt{105} - 3) = 0,900$ . Die Wahl optimaler Ordinatenlagen ergibt ein Verfahren für die Verbesserung von schon gewonnenen Näherungswerten und wird am Beispiel einer hyperbolischen Differentialgleichung demonstriert. Die erzielte Güte der Verbesserung ist wesentlich besser als bei Anwendung der üblichen Trapezformel. *G. Feldmann.*

● **Schoenberg, I. J.:** On smoothing operations and their generating functions. (Nat. Bur. Standards Rep. no. 1734.) Washington: Government Printing Office 1952.

**Frey, Tamás:** Les principes de fonctionnement des diverses sortes de planimètres. Publ. Inst. Math. appl. Acad. Sci. Hongrie 1, 253–293, russ. u. französ. Zusammenfassg. 293, 293–294 (1952) [Ungarisch].

L'article donne une description détaillée du principe de fonctionnement et de la construction des planimètres polaires, linéaires et radiaux, ainsi que des planimètres de Stieltjes. Il discute systématiquement et d'une manière détaillée la théorie des planimètres fonctionnels et intégrimètres fonctionnels convenables pour évaluer les intégrales ayant les formes  $\int_a^b f[y(x)] dx$  et

$\int_a^b f[y(x)] g(x) dx$ ; il donne aussi une proposition concrète concernant la construction des planimètres servant à résoudre ce dernier problème. C'est le planimètre de Lorenz qui, après avoir été soumis à des transformations convenables, peut être employé à ce but. L'article donne aussi la description d'une possibilité d'emploi qui s'est montré utile en pratique du planimètre Stieltjes de Nyström dans l'évaluation numérique des intégrales définies à plusieurs paramètres. [Französisch. Zusammenfassg.]

**Bychovskij, M. L.:** Abschätzung der Genauigkeit der Grundformel der Fehlertheorie elektrischer Stromkreise. Trudy Sem. Točnosti Mechanizmov Mašin 1, 20–31 (1952) [Russisch].

**Bychovskij, M. L.:** Die Genauigkeit von elektrischen Netzen, die für die Lösung Poissonscher Gleichungen bestimmt sind. Trudy Sem. Točnosti Mechanizmov Mašin 1, 32–53 (1952) [Russisch].

**Bennet, J. M. and J. C. Kendrew:** The computation of Fourier syntheses with a digital electronic calculating machine. Acta crystallogr. 5, 109–116 (1952).

Zwei- und dreidimensionale Patterson- und Fouriersynthesen können auf der elektronischen Ziffernmaschine EDSAC berechnet werden. Zur Zeit benötigt eine zweidimensionale Summation von etwa 400 unabhängigen Termen für etwa 2000 Punkte  $1\frac{1}{2}$  Std.; eine dreidimensionale Summation von 2000 Termen für 18000 Punkte etwa 9 Std. Die Maschine kann das Resultat auch direkt in Konturform drucken. *W. Nowacki.*

**Goodell, John D.:** The foundations of computing machinery. J. comput. Systems 1, 1–13 (1952).

Eine einheitliche den Logiker wie auch den Ingenieur befriedigende Terminologie und Grundlagendarstellung für die Theorie der elektronischen Zifferrechenmaschinen wird angestrebt. In diesem Sinn stellt sich die Arbeit nur methodische Ziele, ohne inhaltlich etwas Neues zu bringen. Das wesentliche Werkzeug ist die Symbolik von S. Lesniewski [Fundamenta Math. 14, 1–81 (1929)], der jede binäre Relation der 2-wertigen Logik durch einen Kreis darstellt, in dem die 4 Quadranten den 4 Argumentpaaren (4 Plätzen einer  $2 \times 2$ -Matrix) und der angenommene Wert 1 (= „wahr“) einem radialen Strich durch den passenden Quadrantenbogen entsprechen. Die beiden Argumente werden Stromzuleitungen, der angenommene Wert eine Stromableitung dieses Symbols, wo 1 durch einen Stromstoß, 0 durch seine Abwesenheit repräsentiert wird. Fragen betreffs der Synchronisation, der arithmetischen Basis, der Verwendung mehrwertiger Logiken, usw. werden angeschnitten. Der Name Entscheidungselement (E. E.) wird sowohl für Wahrheitswertfunktionen („Funktoren“) wie auch für die entsprechenden Stromkreiselemente verwendet. *D. Tamari.*



Lode, Tenny: The realization of a universal decision element. J. comput. Systems 1, 14—22 (1952).

Mit den Bezeichnungen der vorstehend besprochenen Arbeit wird empfohlen, alle E. E. aus irgendeinem E. E.-Typus mit einer ungeraden Anzahl (1 oder 3) von 1-Werten und dem Negations-E. E. aufzubauen. Dies sei vorteilhafter als die Verwendung vieler verschiedener E. E.-Typen oder die an und für sich mögliche Beschränkung auf einen einzigen E. E.-Typus (z. B. dem „Shefferstrich“ entsprechend). Detaillierte Tabellen stellen in diesem Zusammenhang wohlbekannte elementare Eigenschaften der 16 möglichen 2-stelligen E. E. zusammen.

*D. Tamari.*

Wilkes, M. V.: The EDSAC computer. Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951), 79—83 (1952).

Die EDSAC-Rechenmaschine (Baubeginn 1947, erste Rechnungen 1949) ist ein elektronischer Rechenautomat für binäre Zahlen. Die einzelnen Stellen dieser Zahlen werden hintereinander verarbeitet (Serienmaschine). Die Eingabe der Zahlen erfolgt über einen Fünf-Loch-Streifensender. Die jeweiligen Lochkombinationen werden durch Fotozellen abgetastet. Die Ausgabe der Rechenergebnisse ist mittels eines Schreibers möglich. Die EDSAC-Rechenmaschine ist eine Ein-Adressen-Anlage. Rund 3000 Elektronenröhren einschließlich der verwendeten Dioden kennzeichnen die Größe des elektronischen Aufwandes. Als Speicher wird ein Ultraschall-Quecksilberspeicher benutzt, der 1024 Speicherplätze für je 16 Zeichen des Binärsystems enthält. Dazu kommt jeweils eine Stelle für die Vorzeichen. Durch eine einfache Umschaltung ist es möglich, daß im Speicher jeweils zwei Plätze miteinander gekoppelt werden, so daß 34-stellige Binärzahlen (das entspricht ungefähr zehnstelligen Dezimalzahlen) untergebracht werden können. Die arithmetischen Operationen: Addition, Subtraktion und Multiplikation werden im Akkumulator durchgeführt. Dieser enthält 70 Binärstellen und eine Vorzeichenstelle. Die Maschine besitzt keinen einfachen Befehl zum Dividieren. Zur Durchführung einer Division ist der Einbau einer „Subroutine“ nötig. Der Entschluß, das Dividieren auf diese Art und Weise zu behandeln, war gefaßt worden, um die Maschine so einfach wie möglich zu bauen. Es hat sich gezeigt, daß durch diesen Verzicht keine wesentlichen Komplikationen im Ablauf der durchgeführten Rechnungen eingetreten sind. Bei weiteren Maschinen soll aber die Division fest mit eingebaut werden. Die EDSAC-Rechenmaschine hat unter normalen Laborbedingungen bisher immer dann zufriedenstellend gearbeitet, wenn sie sorgfältig und gut gepflegt und gewartet wurde. Die Entwicklungs- und Baukosten belaufen sich nach Angaben des Verf. auf weniger als 1000000 \$.

*H. J. Kopineck.*

Alexander, S. N.: The National Bureau of Standard's Eastern Automatic Computer. Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951), 84—89 (1952).

Die SEAC-Rechenanlage des National Bureau of Standards (Abkürzung für: Standard's Eastern Automatic Computer) wurde in ihrem wesentlichen Teil 1950 fertiggestellt. Sie ist eine Serienmaschine mit einem akustischen Quecksilberspeicher für 512 binäre Zahlen. Die Ein- und Ausgabe der Zahlen erfolgt über Lochstreifengeber und Streifenschreiber. Außer den arithmetischen Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division besitzt die Maschine die Möglichkeit, konditionelle Entscheidungsbefehle durchzuführen. 1952 wurde der Ultraschallspeicher durch einen elektrostatischen Schnellspeicher (Williams-Röhre) ergänzt. Nach dieser Erweiterung sind die Operationszeiten etwa folgende: Addition und Subtraktion = 240  $\mu\text{sec.}$ , Multiplikation und Division = 2350  $\mu\text{sec.}$ , konditionelle Entscheidungen = 192  $\mu\text{sec.}$  Die Maschine umfaßt 1300 Elektronenröhren und 16000 Dioden. Die statistische Überwachung der Maschine bei normaler Pflege und Wartung über längere Zeiträume hat ergeben, daß die SEAC-Rechenanlage während 70% ihrer Arbeitszeit einwandfrei gelaufen ist. In einer langen Tabelle werden zahlreiche Arbeiten angegeben, die die SEAC inzwischen erledigt hat. U. a. sind dies die Tabellen der Exponentialfunktion für negative Argumente, Tabellen der Exponentialintegralfunktion für komplexe Argumente, Elektronendichteverteilungen in Kristallen, Wellenfunktionen für Helium- und Lithiumatome.

*H. J. Kopineck.*

● **Mathematical tables. X: Bessel functions, Part II: Functions of positive integer order.** Prepared by a committee of the British Association, and published for the Royal Society. London: Cambridge University Press 1952. XI, 255 p. 60 s.

● **Tables des fonctions de Legendre associées. Fonction associée de première espèce  $P_n^m(\cos \theta)$ .** Premier fascicule:  $n: 0,5 (0,1) 10$ ;  $m: 0 (1) 5$ ;  $\theta: 0 (1) 90^\circ$ . (Collection Technique du Centre National d'Etudes des Télécommunications). Paris: Éditions de la Revue d'Optique 1952.

# Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Misès, Richard de: *Théorie et application des fonctions statistiques*. Rend. Mat. e Appl. **11**, 374—410 (1952).

Die Vorträge, die 1952 am Istituto di alta matematica der Universität Rom gehalten wurden, geben eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse der Theorie der statistischen Funktionen, die der Verf. in einer Reihe umfangreicher Arbeiten früher veröffentlicht hat [dies. Zbl. **12**, 266; **14**, 27; **16**, 312; **37**, 84; *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **6**, 185—212 (1936)]. Dabei werden an verschiedenen Stellen Lücken ausgefüllt, Abänderungen gemacht und Berichtigungen gegeben. In vorbereitenden Bemerkungen (Kap. I) werden die wichtigsten Eigenschaften der Funktionale zusammengestellt, deren unabhängige Variable eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist (Stetigkeit, Ableitung, Taylorentwicklung). Kap. II behandelt die Gesetze der großen Zahlen für statistische Funktionen für begrenzte und unbegrenzte Verteilungen. Hier finden sich auch als neues Ergebnis gemilderte Bedingungen für die Gültigkeit der Grenzwertsätze, historische Bemerkungen sowie Hinweise auf Verallgemeinerungen (starkes Gesetz der großen Zahlen, abhängige statistische Variablen). Im Kap. III wird über die asymptotischen Eigenschaften gewisser Erwartungswerte berichtet, die bei Folgen von Verteilungsfunktionen auftreten. Kap. IV endlich behandelt die asymptotischen Verteilungen der statistischen Funktionen. Hier findet sich das 1947 veröffentlichte, die Taylorentwicklung der Funktionale benutzende Kriterium dafür, wann für  $n \rightarrow \infty$  eine Normalverteilung erhalten wird (Typus I) und wann nicht (Typus II). Die asymptotischen Verteilungen für den Typus II werden dann in Kap. V näher untersucht. Hier wird ferner als Beispiel gezeigt, wie die bekannten Grenzverteilungen der Prüffunktionen  $\chi^2$  und  $\omega^2$  aus den allgemeinen Entwicklungen der Theorie erhalten werden können. *G. Schulz.*

Fréchet, Maurice: *Une propriété générale des valeurs typiques d'un nombre aléatoire*. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **1**, Nr. 1, 1—48 (1952).

Die von Shafik Doss (dies. Zbl. **31**, 59) bemerkte und für andere Verallgemeinerungen verwendete Eigenschaft des Erwartungswertes  $E(X)$  einer reellwertigen Zufallsgröße  $X$ , als die Zahl  $\gamma$  charakterisiert werden zu können, die für alle Zahlen  $\lambda$  der Ungleichung  $|\gamma - \lambda| \leq E(|X - \lambda|)$  genügt, wird hier für andere „Mittel-Bildungen“ (z. T. mit gewissen Einschränkungen) nachgewiesen und zum Nachweis einfacher Eigenschaften dieser Mittel verwendet: den Medianwert  $\bar{X}(P(X \leq \bar{X}) \leq \frac{1}{2})$ , den dominierenden Wert (Wert größter Wahrscheinlichkeit bzw. größter Wahrscheinlichkeitsdichte), den Zentralwert (arithmetisches Mittel der Extremwerte) und der typischen Mittel der Ordnung  $\alpha$ , die durch den Wert  $a = a_0$  bestimmt werden können, für den  $E(|X - a|^\alpha)$  sein Minimum erreicht. *D. Morgenstern.*

Moriguti, Sigeiti: *A lower bound for a probability moment of any absolutely continuous distribution with finite variance*. Ann. math. Statistics **23**, 286—289 (1952).

$f(x)$  bedeute die Dichte einer Verteilung mit dem Mittelwert 0 und einer endlichen Varianz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad f(x) \geq 0, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Verf. bestimmt unter diesen Voraussetzungen die untere Grenze von

$$\Omega_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^n dx,$$

wenn  $n > 1$ .

*W. Saxon.*

Fréchet, Maurice: *Über einige Folgerungen aus Informationen, die das a priori-Problem betreffen*. J. Osaka Inst. Sci. Technol. **4**, 25—38 (1952) [Esperanto].



$h(p)$  und  $g(p)$  seien zwei stetige Verteilungsfunktionen mit  $h(p) \leq g(p)$ ,  $g(0) = h(0) = 0$ ,  $g(1) = h(1) = 1$ .  $\mathfrak{F}$  sei die Klasse der Verteilungsfunktionen  $F(p)$ , welche für  $-\infty < p < \infty$  der Ungleichung  $h(p) \leq F(p) \leq g(p)$  genügen. Sei  $\psi(p) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$ ,  $0 < r < n$ . Verf. studiert das Minimum und Maximum von  $\int_0^z \psi(p) dF(p) \bigg/ \int_0^1 \psi(p) dF(p)$  für  $F(p) \in \mathfrak{F}$ . Auf diese Aufgabe wird man geführt, wenn man  $p$  als „Parameter“ einer Bernoullischen Verteilung und  $F(p)$  als a priori-Verteilung von  $p$  auffaßt und zu vorgegebenem Sicherheitskoeffizienten Sicherheitsintervalle für  $p$  konstruieren will, die von der Gestalt der zugelassenen a priori-Verteilungen unabhängig sind. [Vgl. Verf., dies. Zbl. 36, 85; Ref., Statist. Vierteljahresschr., Wien 5, 174–178 (1953)]. Sorgfältige Abschätzungen ergeben, daß das Maximum in  $\mathfrak{F}$  für  $z \geq r/n$  (= Modalwert von  $\psi(p)$ ), aber nicht notwendig für  $z < r/n$  angenommen wird. Ähnliche Ergebnisse für das Minimum. — Die Arbeit wurde auf Grund eines französischen Manuskriptes von O. Reiersøl ins Esperanto übersetzt.

L. Schmetterer.

**Féron, R. et C. Fourgeaud:** Sur le rapport de deux variables aléatoires. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1, Nr. 2, 50–52 (1952).

Die Verff. skizzieren den Nachweis der Tatsache, daß die charakteristische Funktion des Verhältnisses  $Z = Y/X$  der zwei unabhängigen zufälligen Größen  $X$  und  $Y$ , deren Verteilungen die Dichten  $f(x)$  und  $g(x)$  haben, durch den Ausdruck  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{x}\right) f(x) dx$  gegeben wird, wobei  $\varphi(t)$  die charakteristische Funktion von  $Y$  ist.

Daraus werden einige Schlüsse gezogen, u. a.: Eine notwendige Bedingung für die Existenz der Momente aller ganzen positiven Ordnungen von  $Z$  ist, daß  $X$  für  $x = 0$  keine positive Dichte haben darf.

O. Onicescu.

**Féron, R. et C. Fourgeaud:** Quelques propriétés caractéristiques de la loi de Laplace-Gauss. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1, Nr. 2, 44–49 (1952).

Verf. beweist, daß das Laplace-Gaußsche Gesetz das einzige konjugierte Gesetz ist von zwei miteinander durch harte Korrelation verbundenen, zufälligen Veränderlichen, wobei jede von diesen im Verhältnis zur anderen eine gerade Regressionslinie besitzt. Hierzu wird die der bedingten Verteilung entsprechende charakteristische Funktion gebraucht. Die Definition der harten Korrelation und die Beweisführung des obigen Satzes wird vom Verf. auch auf drei Dimensionen übertragen.

O. Onicescu.

**Aczél, J.:** On composed Poisson distributions. III. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 219–224 (1952).

Following up a paper by L. Jánossy, A. Rényi, and J. Aczél, on composed Poisson distributions [(I), this Zbl. 41, 249] and one by A. Rényi of the same title [(II), this Zbl. 44, 139] the present author generalizes a theorem proved in the second paper: Denote by  $w_k(t_1, t_2)$  the probability of  $k$  random events occurring in the time interval  $(t_1, t_2)$  („general inhomogeneous composed Poisson distribution”); assume that the number of random events occurring in  $(t_1, t_2)$  be independent of the number of events during  $(t_3, t_4)$ , where  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ . Then an explicit formula is given for  $w_k(t_1, t_2)$ . This is achieved by considering the easily understood relations  $w_k(t_1, t_3) = \sum_{j=0}^k w_{k-j}(t_1, t_2) w_j(t_2, t_3)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $t_1 < t_2 \leq t_3$ ),  $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(t_1, t_2) = 1$  and establishing the general solution of this system of functional equations.

H. Geiringer.

**Kanellos, S. G.:** On a conditional distribution. Bull. Soc. math. Grèce 26, 24–28, griechische Zusammenfassg. 28 (1952).

Ein Ereignis  $E$  (Wahrscheinlichkeit  $p$ ) erscheine  $x$ -mal in der Zufallsfolge

$e_1, e_2, \dots, e_k$  und  $y$ -mal in der von ihr unabhängigen Zufallsfolge  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$ . Untersucht wird bei gegebenem  $x + y = c$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis  $(E \text{ in der Folge } (e_1 e_{k+1}), (e_2 e_{k+2}), \dots, (e_k e_{2k}))$  genau  $z$ -mal erscheint. Diese ist von  $p$  unabhängig, hängt also nur von  $k$  und  $c$  ab. Die faktoriellen Momente, Mittelwert, Streuung und das dritte zentrale Moment dieser Verteilung werden angegeben, ferner die Entwicklung in eine Charliersche Reihe sowie eine Differenzengleichung zur bequemen Berechnung.

G. Schulz.

**Gumbel, E. J.:** Intervalles de contrôle pour l'extrapolation des plus grandes valeurs. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1598—1599 (1952).

The author gives a simple proof of the following theorem. Let  $\Phi(y) = \exp(-e^{-y})$  be the distribution function of the largest value for a standardized initial variable of exponential type and let  $T(y) = (1 - \Phi(y))^{-1}$  be the return period. Then for great values of  $T$  the probability that the greatest value corresponding  $T$  will occur during the interval  $(0,32 T, 3,13 T)$  is nearly  $2/3$ .

W. Sadowski.

**Rozov, V. M. und E. A. Chmel'nickij:** Die statistischen Eigenschaften der Enveloppe von Wahrscheinlichkeitsprozessen. Žurn. techn. Fiz. **22**, 1618—1623 (1952) [Russisch].

Die Verff. behandeln folgende Aufgabe, die sie für neu zu halten scheinen:  $x_1, \dots, x_n$  seien  $n$  zufällige unabhängige Variable mit stetiger Verteilung. Gesucht ist die Verteilung von  $\max(x_1, \dots, x_n)$ .

L. Schmetterer.

**Gyires, Béla:** Über den Grenzwert von Summenverteilungen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 741—756, russ. und deutsche Zusammenfassgn. 756—757, 757—758 (1952) [Ungarisch].

Es seien  $\xi_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) ganzzahlige unabhängige Zufallsveränderliche. Es wird die Verteilung von  $\zeta_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  bzw. die Verteilung von  $\zeta_N \bmod n$  untersucht; es werden unter stark einschränkenden Voraussetzungen hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der lokalen Form des zentralen Grenzwertsatzes bzw. für die Gleichwahrscheinlichkeit für  $N \rightarrow \infty$  aller in Betracht kommenden Restklassen mod.  $n$  angegeben. [Bemerkung des Ref.: Verf. hielt diesen Vortrag 1950; inzwischen ist eine Arbeit von A. Dvoretzky und J. Wolfowitz erschienen (dies. Zbl. **43**, 339), welche notwendige und hinreichende Bedingungen für das zweite Problem enthält.]

A. Rényi.

**Bobrov, A. A.:** Über die Bestimmung der Ordnung des stochastischen Wachstums der Summen zufälliger Größen. Ukrain. mat. Žurn. **4**, 393—398 (1952) [Russisch].

Let  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  denote an infinite sequence of independent identically distributed random variables; let us put  $\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ . The sequence  $\eta_n$  of random variables is called to possess a definite order of stochastic growth, if there exists a monotonically increasing sequence  $B_n$  of positive numbers such that, putting  $\zeta_n = (\eta_n - m_n)/B_n$  where  $m_n$  denotes the median of  $\eta_n$ ,  $|\zeta_n|$  is neither tending stochastically to 0 neither tending stochastically to  $+\infty$ . The following theorem is proved in the paper: The sequence  $\eta_n$  possesses a definite order of stochastic growth if and only if there exist sequences of numbers  $A_k$  and  $C_k > 0$  and an increasing sequence  $n_k$  of integers ( $k = 1, 2, \dots$ ) such that the distribution function of  $v_k = (\eta_{n_k} - A_k)/C_k$  tends to a nondegenerate distribution function. It is stated without proof that this result is valid also without the supposition that the variables  $\xi_n$  are identically distributed.

A. Rényi.

**Wolfowitz, J.:** On the stochastic approximation method of Robbins and Monro. Ann. math. Statistics **23**, 457—461 (1952).

Die vorliegende Untersuchung bezieht sich auf das von Robbins und Monro (dies. Zbl. **54**, 59) erstmalig betrachtete Verfahren der stochastischen Approximation: Die Gleichung  $M(x) = \alpha$ , wo  $M(x) = \text{Erwartungswert einer beobachtbaren Zufallsgröße } Y(x)$  ist, wird durch  $X_{n+1} = X_n + a_n(\alpha - Y(X_n))$  iterativ gelöst:  $X_n$  konvergiert nach Wahrscheinlichkeit gegen die Lösung  $\theta$ . Die Voraussetzungen von Robbins und Monro werden abgeschwächt: es genügt, wie von diesen Autoren vermutet, die Beschränktheit der Streuung von  $X_n$  an Stelle der Beschränktheit der Werte von  $X_n$  selbst. An Gegenbeispielen wird gezeigt, daß diese Voraussetzung über die Beschränktheit der Streuungen nicht entbehrt werden kann, und daß man über  $M(x)$



mehr als  $M(x) < \alpha$  für  $x < \vartheta$  und  $M(x) > \alpha$  für  $x > \vartheta$  voraussetzen muß. Das Ergebnis dieser Arbeit ist inzwischen weiter verschärft worden: s. z. B. A. Dvoretzky (dies. Zbl. 72, 347), J. Wolfowitz [Ann. math. Statistics 27, 1151—1156 (1956)]. *D. Morgenstern.*

**Kiefer, J. and J. Wolfowitz:** Stochastic estimation of the maximum of a regression function. Ann. math. Statistics 23, 462—466 (1952).

In Analogie zu dem von Robbins und Monro untersuchten Verfahren der stochastischen Approximation (dies. Zbl. 54, 59) wird hier die Stelle  $x = \vartheta$  des Maximums einer Funktion  $M(x)$  gesucht, wenn  $M(x) =$  Erwartungswert einer beobachtbaren Zufallsgröße  $Y(x)$  ist. Unter geeigneten Voraussetzungen über  $M(x)$  wird mit zwei Konstantenfolgen  $a_n, c_n$ , wo  $c_n \rightarrow 0$ ,  $\sum a_k = \infty$ ,  $\sum a_n c_n < \infty$ ,  $\sum a_n^2 c_n^{-2} < \infty$  (z. B. also  $a_n = n^{-1}$ ,  $c_n = n^{-1/3}$ )

$$Z_{n+1} = Z_n + a_n c_n^{-1} (Y(Z_n - c_n) - Y(Z_n + c_n))$$

gebildet und  $Z_n \rightarrow \vartheta$  nach Wahrscheinlichkeit bewiesen. Auf folgende Probleme wird in diesem Zusammenhang hingewiesen: 1. Bestimmung von Konstantenfolgen, die in einem zu findenden Sinn optimal sind, 2. Auffinden einer geeigneten Abbrechregel, d. h. zu erkennen, wann man hinreichend nahe an der Lösung ist, 3. Kombination von beiden zu der Frage nach einem besten Verfahren. *D. Morgenstern.*

**Siraždinov, S. Ch.:** Eine Verschärfung der Grenzwertsätze für homogene Markovsche Ketten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 1143—1146 (1952) [Russisch].

Es bezeichne  $s$  die Anzahl der Zustände einer homogenen Markoffschen Kette; die Komponenten  $m_n^1, m_n^2, \dots, m_n^s$  des Vektors  $\mathbf{m}_n$  bezeichnen die Zeitintervalle bis zum  $n$ -ten Schritt, während der sich das System in den einzelnen Zuständen aufhielt. Ferner sei  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_s)$  ein  $s$ -dimensionaler Vektor,  $F_n(x)$  die Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen

$$\xi_n = \frac{\mathbf{m}_n \mathbf{h} - n \vec{\lambda} \mathbf{h}}{\sigma \sqrt{n}}, \text{ wobei } \vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_s), \lambda_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(m_n^\alpha)}{n}.$$

Unter der Annahme, daß a) die Zustände eine einzige rekurrente aperiodische Klasse bilden, und daß b)

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^s \lambda_{\alpha\beta} h_\alpha h_\beta = \sigma^2 > 0 \quad \left( \lambda_{\alpha\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(m_n^\alpha - M m_n^\alpha)(m_n^\beta - M m_n^\beta)}{n} \right)$$

gilt, zeigt Verf. mit der Methode der charakteristischen Funktion die Ungleichung

$$\left| F_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \right| < \frac{c}{\sqrt{n}}, \text{ wobei die Konstante } c \text{ nur von den Übergangs-}$$

wahrscheinlichkeiten und von  $\mathbf{h}$  abhängt. Unter der zusätzlichen Annahme, daß die Komponenten von  $\mathbf{h}$  eine arithmetische Progression bilden, beweist Verf. für  $\mathbf{m}_n \mathbf{h}$  einen lokalen Grenzverteilungssatz. Ersetzt man a) durch eine stärkere Beschränkung, so gibt Verf. durch die asymptotische Entwicklung von  $n^{(s-1)/2} P(\mathbf{m}_n = \mathbf{x})$  eine Verschärfung eines Kolmogoroffschen Resultates (dies. Zbl. 38, 290).

*M. Arató.*

**Jaglom, A. M.:** Einführung in die Theorie der stationären Zufallsfunktionen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 5 (51), 3—168 (1952) [Russisch].

Verf. faßt die moderne Theorie und die Resultate über die Extrapolation und Filtration der stationären stochastischen Prozesse zusammen. Kap. I behandelt die allgemeine Theorie der stationären stochastischen Prozesse, die Theorie der Korrelationsfunktionen und Spektralfunktionen (A. J. Khintchine, dies. Zbl. 8, 368) und die Theorie der Spektralzerlegung [A. N. Kolmogoroff, Bull. Moskovsk. Gosudarst. Univ. Matematika 2 (1941); dies. Zbl. 22, 359]. Danach wird die Spektralzerlegung der Derivierten und Integrale von stationären Prozessen behandelt. Zum Schluß werden Resultate mitgeteilt, die sich auf die mehrdimensionale Verallgemeinerung des bisherigen und auf Prozesse mit stationärem Anwachsen beziehen. Kap. II. beschäftigt sich mit der linearen Extrapolation von stochastischen Folgen und stochastischen Prozessen, die auf der Methode der kleinsten Quadrate beruht. Die Behandlungsweise des Verf. ist einfacher als die übliche

Als Grundlage zur Behandlung von stochastischen Folgen bzw. stochastischen Prozessen dienen die Arbeiten von A. N. Kolmogoroff [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 5, 3—14 (1931)] bzw. M. G. Krein [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 46, 339—342 (1945)]. Nach den allgemeinen Betrachtungen wird ausführlich der Fall behandelt, daß die spektrale Verteilungsfunktion  $F(\lambda)$  bei stochastischen Folgen gleich einer rationalen Funktion von  $e^{i\lambda}$  und bei stochastischen Prozessen gleich einer rationalen Funktion von  $\lambda$  ist. Zum Schluß wird ein Überblick über einige neuere Resultate gegeben.

*L. Takács.*

**Onoyama, Takuji:** A representation of a family of random variables and their means. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 6, 179—183 (1952).

The author gives an axiomatization of the probability theory by describing the set of all random variables as a complete modular lattice satisfying some conditions and proves, with several fundamental theorems, a theorem which is an extension of a spectral representation theorem of stationary stochastic processes. *K. Itô.*

**Rényi, Alfred:** Stochastic independence and complete systems of functions. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 299—307 [Ungarisch], 309—316 [Russisch] und engl. Zusammenfassg. 308 (1952).

The following conjecture of H. Steinhaus is considered: if  $g_1(x), g_2(x), \dots$  are measurable, stochastically independent functions in the interval  $(0, 1)$ , and they are saturated with respect to independence, i. e. if  $g(x)$  is not almost everywhere constant, the system of functions  $g(x), g_1(x), g_2(x), \dots$  cannot be independent, then the system of functions

$$g_{m_1 m_2 \dots m_n}(x) = g_1^{m_1}(x) g_2^{m_2}(x) \dots g_n^{m_n}(x)$$

( $m_i = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$ ) is complete in the space  $L^2$ . It is mentioned that this conjecture does not hold in general. The completeness of the system of functions is considered under the condition of maximality which notion is introduced by the author in a previous paper (this Zbl. 40, 73). The system of measurable functions  $\{g_n(x)\}$  is called maximal if there exists a set  $Z$  of measure 0, such that if  $x \neq y$  and  $x \notin Z, y \notin Z$ , then a positive integer  $n$  can be found for which  $g_n(x) \neq g_n(y)$ . The following theorem is proved: if  $\{g_n(x)\}$  is a maximal system of measurable independent functions in the interval  $(0, 1)$  and the number of possible values of  $g_n(x)$  is finite for every  $n$ , then the system  $g_{m_1 m_2 \dots m_n}(x)$  is complete in  $L^2$ . It is mentioned that the condition of maximality is fulfilled in all examples of H. Steinhaus. It is proved further that a maximal system of independent functions is saturated with respect to independence. In a remark made by the correction it is stated that the theorem is true without the condition that the functions  $g_n(x)$  can only assume a finite number of possible values. *A. Prékopa.*

**Rényi, Alfred:** On a conjecture of H. Steinhaus. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédiés à H. Steinhaus, 279—287 (1952).

The paper contains the generalization of some earlier results of A. Rényi (see the preceding review), concerning a conjecture of H. Steinhaus. The conjecture, that arises from the year 1937 is the following: if a system  $\{f_n(x)\}$  of a finite or enumerably infinite number of stochastically independent measurable functions, defined in a finite interval  $(a, b)$ , is saturated with respect to independence, i. e. if there exists no measurable function  $g(x)$ , that is not constant almost everywhere and the functions  $g(x), f_1(x), f_2(x), \dots$  are independent, then the system of functions

$$f_{m_1 m_2 \dots m_n}(x) = f_1^{m_1}(x) f_2^{m_2}(x) \dots f_n^{m_n}(x), \quad m_i = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$$

is complete in  $L^2$ . A counter-example is given, that this conjecture does not hold in general. However a similar theorem is true for maximal systems. A system of functions  $\{f_n(x)\}$  is called maximal if there exists a set  $Z$  of Lebesgue-measure 0, such that if  $x_1 \notin Z, x_2 \notin Z$  and  $f_n(x_1) = f_n(x_2)$  for every  $n$ , then  $x_1 = x_2$ . The notion of maximality is due to the author in an earlier paper (cf. this Zbl. 40, 73). An interesting example of maximal system is the system of the two functions  $\sin x, \cos x$ . This example is generalized and it is mentioned that in all examples of H. Steinhaus the maximality is fulfilled. It is proved that if  $\{f_n(x)\}$  is a maximal system, then the system  $f_{m_1 m_2 \dots m_n}(x)$  is complete in  $L^2$ . The proof is based on the following lemma: if  $f(x)$



is a measurable, bounded and maximal function in the interval  $(0, 1)$  and  $0 \leq f(x) \leq 1$ , then the set of functions  $\{f_n(x)\}$  is closed in the space  $L^2$ . Furthermore it is proved, that if the system of independent functions  $\{f_n(x)\}$  is maximal it is also saturated with respect to independence. The following problem is formulated: what are the necessary and sufficient conditions regarding the system of independent functions  $\{f_n(x)\}$  that the system  $f_{m_1, m_2, \dots, m_n}(x)$  of functions should be complete in  $L^2$ ? A. Prékopa.

**Izaki, Mamoru:** Convergence of integral and its applications. Bull. math. Statist. 5, 31—34 (1952).

The author gives some estimation formulae concerning T. Kitagawa's random integration (this Zbl. 45, 406) by elementary computations. K. Itô.

**Kanô, Seigo:** On the prediction problem of a stationary stochastic process. Mem. Fac. Sci. Kyûsyû Univ., Ser. A 6, 173—178 (1952).

Let  $f(t)$  be a sample function of a stationary stochastic process. The author discusses the problem of finding  $K(\sigma)$  which minimizes

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \int_a^b f(t + \alpha) g(x) dx - \int_0^A f(t - \sigma) dK(\sigma) \right|^2 dt, \quad 0 \leq a < b < A,$$

by the same way as in Wiener's prediction theory. K. Itô.

**Malécot, G.:** Les processus stochastiques et la méthode des fonctions génératrices ou caractéristiques. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1, Nr. 3, 1—16 (1952).

In the first section of the present work conservative processes are studied, namely Markov processes where the behaviour of every corpuscle is independent of the positions of the remaining corpuscles and more general Markov schemes — where the movements of different corpuscles are no more independent, interactions being possible. The second section deals with multiplicative processes, especially with Furry and Arley models. Processes with multiplication and limitation are discussed in the third section. Finally, in the forth section an extension of the processes with limitation and mutation (studied in § 3) is obtained, combining them with a process analogous to those treated in the first section. R. Theodorescu.

**Dobrušin, R. L.:** Über die Regularitätsbedingungen der in der Zeit homogenen Markoffschen Prozesse mit abzählbar vielen möglichen Zuständen. Uspechi. mat. Nauk 7, Nr. 6 (52), 185—191 (1952) [Russisch].

Let  $\{P_i^{(j)}(t)\}$  denote the transition matrix function of a stationary Markov process and suppose that  $a_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P_i^{(i)}(t)}{t}$ ,  $a_i^{(j)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_i^{(j)}(t)}{t}$  ( $j \neq i$ ) exist.

Joining to the works of Doob [cf. Trans. Amer. math. Soc. 52, 37—64 (1942); 58, 455—347 (1945)] and Feller (this Zbl. 25, 347) the author gives three necessary and

sufficient conditions for the regularity of the process. The first one is  $P \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_{i_j}} = \infty \right) = 1$

where the sequence  $i_1, i_2, \dots$  is fixed by the sequence of states  $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots$  runned by the system. The second one is the relation  $a_i < C < \infty$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , where  $C$  is a constant. It is introduced the notion of a dangerous state. A non-recurrent [cf. W. Feller, An introduction to probability theory (this Zbl. 39, 132), Ch. 15] state  $E_i$  is called dangerous if the probability of the transition from  $E_i$  to a non-recurrent state has a positive probability. According to the third condition the process is regular if and only if the states are non-dangerous. It is proved further that if  $a_i^{(j)} = 0$  for  $j \geq i + 2$  and  $a_i^{(i+1)} > 0$ , then the process is regular if and only if  $M(\tau_1) = \infty$  where  $\tau_1$  is the time which is necessary for making an infinite number of transitions starting from the state  $E_1$ . A. Prékopa.

**Dynkin, E. B.:** Kriterien für die Stetigkeit und für das Nichtvorhandensein von Unstetigkeiten zweiter Art für die Trajektorien eines Markoffschen zufälligen Prozesses. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 563—572 (1952) [Russisch].

The author considers Markov-processes  $x(t)$  which take on values in an abstract phase-space  $\Omega$ . Let  $P(s, y, t, E)$  denote the conditional probability of the event  $x(t) \in E$  relative to the condition  $x(s) = y$ , where  $E$  is an element of a Borel field

of sets given in  $\Omega$  and  $(s, t)$  is a subinterval of a fixed time-interval  $I$ . Let further  $U_\varepsilon(y)$  denote the  $\varepsilon$ -neighbourhood of  $y \in \Omega$ ,  $V_\varepsilon(y)$  its complement and

$$\varphi_\varepsilon(h) = \sup_{(t, t+\alpha) \subset I, y \in \Omega, 0 \leq \alpha \leq h} P(t, y, t+\alpha, V_\varepsilon(y)).$$

Two theorems are proved. In the first one it is proved that if  $\varphi_\varepsilon(h) = o(h)$  for every  $\varepsilon > 0$ , then the sample functions of the process  $x(t)$  are continuous in  $I$  with probability 1. The Theorem cannot be sharpened. In the second one the case  $\varphi_\varepsilon(h) = o(\sqrt{h})$  is considered and is proved that if this relation holds for every  $\varepsilon > 0$ , then the sample functions do not have discontinuities of the second order (i. e. their right and left limits exist) with probability 1. Theorem 2 contains as a special case a well-known theorem of Lévy (this Zbl. 10, 70) concerning the absence of discontinuities of the second order of a process with independent increments. Another special case is the theorem of Wiener relative the continuity of the sample functions of a Brownian movement process. The author shows that by his method some results concerning non Markov processes are also obtainable.

A. Prékopa.

\*Onoyama, Takuji: Random frequency process. Bull. math. Statist. 5, 51—58 (1952).

Schelling, Hermann von: Most frequent particle paths in a plane. Trans. Amer. geophys. Union 32, 222—226 (1951/52).

Es werden die wahrscheinlichsten Kurven unter der Bedingung gegebener Anfangs- und Endlage (Punkt und Richtung) und Länge bestimmt, wenn die zufälligen Kurven als Polygone konstanter Seitenlänge mit unabhängigen normalverteilten Außenwinkeln, bzw. deren Limites bei immer kleiner werdender Seitenlänge definiert sind. Die wahrscheinlichsten Kurven sind die Extremalen des Variationsproblems mit  $\int [ds/\rho(s)^2] = \text{Extr.}$  ( $\rho = \text{Krümmung}$ ) und lassen eine Parameterdarstellung durch elliptische Integrale erster und zweiter Art zu. Verf. diskutiert spezielle Lösungsscharen, die er in Zusammenhang mit Raubbewegung und Flußeinmündungen bringt.

D. Morgenstern.

Schelling, Hermann von: Most frequent particle paths on the unit sphere. Trans., Amer. geophys. Union 34, 570—572 (1952).

Die in der vorstehend referierten Arbeit durchgeführten Untersuchungen werden auf entsprechend definierte Kurven auf der Kugel übertragen. An Stelle der Krümmung tritt die geodätische Krümmung und die Parameterdarstellung erfordert elliptische Integrale erster und dritter Art.

D. Morgenstern.

Feller, William: Some recent trends in the mathematical theory of diffusion. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 322—339 (1952).

This is an expository paper concerning the theory of diffusion. The author introduces Kolmogorov equation on Markov processes in an ordinary way and stresses the importance of the problem of investigating the boundary conditions one must set in order to assure the uniqueness of the solution of Kolmogorov equation. This problem was solved later by the author completely (this Zbl. 47, 93). The author also discusses the relation between semi-groups and Markov processes and derives Bochner's operator equation defining stable distributions (Bochner, this Zbl. 33, 68) by using Riesz' potentials.

K. Ito.

MacDonald, D. K. C.: Information theory and its application to taxonomy. J. appl. Phys. 23, 529—531 (1952).

## Statistik:

• Freund, John E.: Modern elementary statistics. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1952. 418 p.

Finetti, Bruno de: La notion de „distribution d'opinions“ comme base d'un essai d'interprétation de la statistique. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1, Nr. 2, 1—19 (1952).

In this address to the Statistical Institute of the University of Paris the author establishes a formal parallelism between the theory of decision functions and his own subjective approach to the theory of probability, by interpreting an (a priori) distribution as an „initial opinion“ of an observer. He then gives a brief survey of Wald's theory and proceeds to mention problems connected with a criterion of unanimity (analogous to dominance), and a similar criterion of majority. He gives an example of an inductive process of unanimity, and of one of majority. Finally, he sketches a few problems connected with details of his approach. *S. Vajda.*

**Gini, Corrado:** On some symbols that may be usefully employed in statistics. Bull. Inst. internat. Statist. 33, Nr. 2, 249—282 (1952).

Vgl. dies. Zbl. 52, 366.

**Delaporte, Pierre J.:** Contrôle statistique de produits industriels dont la qualité n'a pas une distribution de Laplace-Gauss. Bull. Inst. internat. Statist. 33, Nr. 5, 7—12 (1952).

**Sittig, J.:** The economic choice of sampling systems in acceptance sampling. Bull. Inst. internat. Statist. 33, Nr. 5, 51—84 (1952).

**Weibull, I.:** A method of determining inspection plans on an economic basis. Bull. Inst. internat. Statist. 33, Nr. 5, 85—104 (1952).

**Hamaker, H. C.:** Economic principles in industrial sampling problems. A general introduction. Bull. Inst. internat. Statist. 33, Nr. 5, 105—122 (1952).

**Gracheva, E. G.:** The application of mathematical methods for evaluating the results of chemical analysis. J. anal. Chem. USSR 7, 51—54 (1952).

**Komar, N. P.:** The application of mathematical statistics in analytical chemistry. J. anal. Chem. USSR 7, 361—375 (1952).

1. The basic principles of the theory of errors, and mathematical statistics of direct importance for analytical chemistry, are set forth. 2. The fundamental formulas for the necessary calculations are adduced. 3. The characteristics which it is necessary to take into account when using mathematical statistics in analytical chemistry are noted. 4. Examples taken from periodical articles are treated in detail. (Englische Zusammenfassg.)

**Dugué, Daniel:** Statistique et psychologie. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1, Nr. 2, 20—40 (1952).

„Statistics and psychology“ is a rather pretentious title for a short discussion of a few problems arising by the application of statistical methods to psychological data of a certain kind. In the first part of the paper the problem of the selection of candidates, on the strength of scores obtained at an examination, is formulated statistically. However, only a very simple case of the general problem is considered: only two categories of candidates (suitable and unsuitable) are distinguished, and it is supposed that only the risk of accepting unsuitable candidates but not the risk of rejecting suitable candidates has to be limited. Moreover, the discussion is not carried appreciably beyond a mere formulation of the problem. The main part of the paper is concerned with the problem of testing whether the results of certain psychological tests are distributed normally. The material consists of scores obtained by over 2000 test-subjects, submitted to a number of different tests. The individuals are grouped in a number of samples, but it is not mentioned how this grouping has been performed. For each test separately the means and variances of the samples are calculated, and independence of these quantities is used as a criterion for normality. It is not clear why the author has chosen this rather unprofitable course; one would have expected a more straightforward approach. Moreover, the method used to test independence seems rather unsatisfactory. Before applying the method to his data the author uses several pages, in the reviewer's opinion quite unnecessarily, to reproduce in detail a proof, given already in 1942, of the fact that independence of sample-mean and -variance is a valid criterion for normality of the parent distribution.

*J. J. Bezem.*

**Robbins, Herbert:** Some aspects of the sequential design of experiments. Bull. Amer. math. Soc. 58, 527—535 (1952).

Nach kurzer Schilderung der Entwicklungsgeschichte der Folgetestverfahren (sequential analysis) wird besonders auf diejenigen Probleme hingewiesen, bei denen nicht (oder nicht nur) die Anzahl der Proben erst im Laufe des statistischen Verfahrens festgelegt wird, sondern die Auswahl der Gesamtheiten (population), aus der die jeweiligen Proben entnommen werden. Als instruktives Beispiel wird die Aufgabe behandelt: Man kann iterativ mit je einer von zwei Münzen (mit unbekannten „Kopf“-Wahrscheinlichkeiten  $\alpha$  bzw.  $\beta$ ) werfen und soll dabei den Erwartungswert der Gesamtzahl von „Kopf“-Würfen maximieren. Es werden verschiedene Regeln hierfür verglichen und insbesondere ein Verfahren angegeben, für das — sogar im Falle, daß man an Stelle der Münzen zufällige Größen mit zwei beliebigen Verteilungen (mit Erwartungswerten  $\alpha$



bzw.  $\beta$ ) hat  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \max(x, \beta)$  gilt, wo  $S_n = \sum_{r=1}^n \{X_r \text{ bzw. } Y_r\}$  ist. Bei Verallgemeinerung dieser Fragestellung auf kontinuierlich viele Verteilungen wird auf das Verfahren der stochastischen Iteration von Robbins und Monro (dies. Zbl. 54, 59) hingewiesen. Abschließend wird die große praktische Bedeutung des Einflusses des günstigen Abbrechens (optimal stopping) erwähnt. Inzwischen hat Verf. das Problem der geeigneten Auswahl aus zwei Verteilungen auch bei Verwendung eines nur endlich viele Schritte zurückreichenden Gedächtnisses behandelt [Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 920—923 (1956)]. *D. Morgenstern.*

**Cansado, Enrique:** Expectations and variances in multi-stage sampling. Trabajaos Estadist. 3, 27—38, spanische Zusammenfassg. 39—41 (1952).

Mit Hilfe der Formeln für den Erwartungswert  $E$  und die Streuung  $D^2$  bei einer zweistufigen Stichprobe werden  $E$  und  $D^2$  für mehrere spezielle mehrstufige Stichprobenverfahren neu hergeleitet. *E. Walter.*

**Patnaik, P. B.:** A test of significance of the standardised mean. Bull. Inst. internat. Statist. 33, Nr. 2, 163—170 (1952).

Dans cet article se trouve une discussion sur un test pour une valeur donnée du coefficient de variation en population, lorsque l'écart type dans la population est inconnu. Cela s'obtient ainsi: On construit d'abord des régions semblables à l'espace d'échantillon relative à l'écart type inconnu et ensuite on choisit les meilleures dans cette classe. (Französische Zusammenfassung.)

**Rvačeva, E. L.:** Über die maximale Abweichung zwischen zwei empirischen Verteilungen. Ukrain. mat. Žurn. 4, 373—392 (1952) [Russisch].

The paper is connected with the well known Smirnov's theorems on the distribution of the maximum difference between two empirical cumulative distribution functions of random samples from the same population. Let  $z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_{2n}$  be  $2n$  arranged observations in order (both samples have  $n$  elements). There are given theorems on multidimensional distributions (exact and asymptotic) of the maximum differences between two empirical cumulative distributions on random intervals  $(z_p, z_q)$  where  $0 \leq p < q \leq 2n$ . *W. Sadowski.*

**Choudhury, P.:** Sur un test d'indépendance des moyennes et des écarts types d'échantillons extraits d'une population normale. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1, Nr. 2, 41—43 (1952).

Es werden  $k$  Stichproben von bzw.  $n_1, n_2, \dots, n_k$  Elementen aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der Streuung  $\sigma$  genommen.  $\bar{x}_r$  und  $s_r$  seien der Durchschnitt bzw. die Streuung der  $r$ -ten Stichprobe. Verf. bildet die Wahrscheinlichkeitsgröße  $z = \sum_{r=1}^k \frac{n_r \bar{x}_r s_r}{\sigma^2}$ , berechnet die Verteilungsfunktion von  $z$  und gründet einen Test für die Normalität der Grundgesamtheit auf diese Größe. *H. Bergström.*

**Terpstra, T. J.:** A confidence interval for the probability that a normally distributed variable exceeds a given value, based on the mean and the mean range of a number of samples. Appl. sci. Research, A 3, 297—307 (1952).

In der Qualitätskontrolle tritt das folgende Problem auf: Es sei  $x$  eine mit Mittel  $\mu$  und Streuung  $\sigma^2$  normalverteilte Zufallsvariable,  $x \geq a$  bedeute „Ausschuß“. Gesucht wird ein Konfidenzbereich für die Ausschußwahrscheinlichkeit

$$P = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

bei unbekannten  $\mu$  und  $\sigma$  aus den Beobachtungswerten einer Stichprobe. Das Verfahren vermeidet die lästige Berechnung der Streuungen und verwendet die Stichprobenfunktion  $w_{k,l}$ , die mittlere Spanne der  $k$  Stichproben vom Umfang  $l$ . Eine Näherungslösung für die Verteilung von  $w_{k,l}$  gab Patnaik (dies. Zbl. 37, 92) an, die hier verwendet wird. Das Verfahren wird numerisch verglichen mit einem Verfahren, in dem der Konfidenzbereich unter Benutzung der  $t$ -Verteilung aus Mittel und Streuung der Stichprobe gewonnen wird. — Der Arbeit sind mehrere Diagramme beigelegt, die die Bestimmung der Konfidenzbereiche für  $k = 1, \dots, 5$  mit  $l = 4, 6, 8, 10$  ohne weitere Rechnung gestatten. *F. Wever.*

**Rushton, S.:** On sequential tests of the equality of variances of two normal populations with known means. Sankhya 12, 63—78 (1952).

Zur Prüfung der Hypothese, daß zwei normalverteilte Zufallsvariable  $X_1$  und  $X_2$  mit bekannten Mittelwerten gleiche, aber unbekannte Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  haben, gegen die Alternative, daß sich die Varianzen um einen bekannten Faktor  $\delta$  unterscheiden, werden mit Hilfe der Methode von M. Barnard (dies. Zbl. 46, 365) zwei Sequentialtests hergeleitet. Der erste benutzt beim  $n$ -ten Schritt die Varianzen  $S_j$  der  $n$  Beobachtungen über  $X_j$ , der zweite, bei dem bei jedem Schritt je  $m$  Beobachtungen zu machen sind, die Summe der  $n$  Spannweiten  $r_{ij}$  ( $i = 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, n$ ). Der zweite Test unterscheidet sich nur geringfügig von einem von D. R. Cox 1949 (dies. Zbl. 37, 93) angegebenen Test, bei dem das Likelihoodverhältnis mit Hilfe einer Gewichtsfunktion abgeleitet wird. Tabellen der kritischen Werte von  $U_n = S_1/S_2$  bzw. von  $R_n = \sum r_{1j} / \sum r_{2j}$  sind für  $\delta = 1, 5; 2$  und  $3$ ;  $m = 4$  und  $8$  und verschiedene Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha$  und  $\beta$  beigefügt. Für den Fall, daß beim ersten Test die Mittelwerte nicht bekannt sind, hat man an Stelle der kritischen Werte  $U_n$  die Werte  $U_{n-1}$  zu nehmen.

E. Walter.

**Rushton, S.: On a two-sided sequential  $t$ -test.** Biometrika 39, 302—308 (1952).

Verf. hatte 1950 (dies. Zbl. 38, 298) einen sequentiellen, einseitigen  $t$ -Test entwickelt. Er behandelt in dieser Arbeit in entsprechender Weise den sequentiellen zweiseitigen  $t$ -Test und den sequentiellen Zweistichproben- $t$ -Test. Das Likelihoodverhältnis wird in der von M. Barnard (dies. Zbl. 46, 365) angegebenen Art abgeleitet und besteht aus dem Verhältnis zweier nicht-zentraler  $t$ -Verteilungen, die sich um einen Freiheitsgrad von den nichtzentralen  $t$ -Verteilungen unterscheiden, die man erhält, wenn man das Verhältnis nach A. Wald 1947 (dies. Zbl. 29, 158) mit Hilfe einer geeigneten Gewichtsfunktion bestimmt. — Das Likelihoodverhältnis läßt sich durch eine konfluente hypergeometrische Reihe darstellen, für deren Logarithmus verschiedene praktisch wichtige Näherungen abgeleitet werden.

E. Walter.

**Iyer, P. V. Krishna and Daroga Singh: Problem of distance in sampling.** Bull. Inst. internat. Statist. 33, Nr. 2, 113—118 (1952).

Here, distance means travelling distance. The essential part of the paper is concerned with „free“ sampling from a rectangular lattice; i. e., the lattice points are included or discarded independently, with a fixed probability. The travelling distance is taken to be the column range of the whole sample, plus the sum of all row ranges. For this statistic, the authors compute mean and variance.

G. Elfving.

**Basu, D.: On the minimax approach to the problem of estimation.** Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 287—299 (1952).

This paper, written shortly after the publication of Wald's book on decision functions, mainly exemplifies the difficulties arising when the appropriate compactness and boundedness conditions are not fulfilled. There is a detailed treatment of the estimation of a Poisson parameter when this is restricted to a finite interval such as  $(0, 1)$  and the loss function is taken to be squared error.

G. Elfving.

**Williams, E. J. and N. H. Kloot: Stress-strain relationship. A mathematical model.** Austral. J. appl. Sci. 3, 1—13 (1952).

Ein Stab bestehe aus einer großen Zahl von parallelen Fasern, die sich bis zur Zerreißgrenze ideal elastisch verhalten. Jede Faser hat ihre eigene Zerreißgrenze;  $P(x)$  sei der Bruchteil aller Fasern, die bis zu einer Dehnung  $x$  nicht reißen. Als (integrale) Wahrscheinlichkeitsverteilung

kann  $P(x) = \int_x^\infty p(u) du$  gesetzt werden. Verff. nehmen  $p(u) = u^{n-1} \exp(-u/c)/c^n \Gamma(n)$  an,

mit frei wählbarem  $c$  und  $n$ , und berechnen die Spannungs-Dehnungskurve des Stabes. Für  $c = 1$  ergeben sich überraschend wirklichkeitsgetreue Kurven;  $n \approx 10$  entspricht dem Verhalten von Hölzern (auf welche der Ansatz ursprünglich zugeschnitten war),  $n \approx 1$  entspricht Beton und  $n \approx 100$  Metallen ohne Fließbereich. Weiterhin wird die endliche Zeitdauer des Zerreißens einer Faser berücksichtigt; so ergibt sich eine Theorie des zyklischen Dehnungsversuches, welche auf eine schwierig zu behandelnde Funktional-Differentialgleichung führt, aber in den Grundlagen ebenfalls befriedigt.

E. Breitenberger.

**Williams, E. J.: Applications of component analysis to the study of properties of timber.** Austral. J. appl. Sci. 3, 101—118 (1952).

Eingehende Erweiterung und Anwendung der Varianzanalyse auf einigermaßen verwickelte Verhältnisse, wie sie im besonderen bei der Qualitätsprüfung von Hölzern auftreten. Es sollen nicht bloß Teilvarianzen verglichen, sondern auch die Komponenten einer Populations-Gesamtvarianz (hier die Varianzen zwischen Wäldern, zwischen Bäumen und zwischen Ästen) geschätzt und ihre Schätzungsfehler ermittelt werden. Dabei sind die vorliegenden Stichproben meist von verschiedenem Umfang, so daß die herkömmlichen Formeln versagen. Alle nötigen Ergänzungen werden abgeleitet und an zwei Zahlenbeispielen erläutert.

E. Breitenberger.

**Whittle, Peter:** Some results in time series analysis. Skand. Aktuarietidskr. 1952, 48—60 (1952).

Die Arbeit enthält im wesentlichen eine Zusammenstellung der in der Diss. des Verf. (dies. Zbl. 45, 413) behandelten Sätze, wobei die Beweise angedeutet werden.

*E. Walter.*

**\*Nagabhushanam, K.:** Some aspects of stationary time series. Sankhya 12, 109—116 (1952).

**Whittle, P.:** Tests of fit in time series. Biometrika 39, 309—318 (1952).

Es werden Anpassungstests für rein nichtdeterministische Prozesse, die sich durch ein autoregressives Schema mit unendlich vielen Koeffizienten darstellen lassen, betrachtet. Für das Prüfen einer  $n$ -gliedrigen Zeitreihe, wenn die Nullhypothese  $H_0$   $p$  und die  $H_0$  umfassende Hypothese  $H_1$  insgesamt  $p + q$  Parameter der normalisierten Spektralfunktion unbestimmt läßt, wird als Prüfmaß der Quotient  $\lambda = U_1/U_0$  der Summen  $U_1$  bzw.  $U_0$  der Abweichungsquadrate vorgeschlagen, wobei die unbekannten Parameter mit der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden. Auch wenn  $H_0$  gegenüber allen derartigen Prozessen geprüft werden soll, sei der Test anzuwenden, sofern  $q$  ausreichend groß gewählt wird, da sich jedes autoregressive Schema durch ein Schema  $q$ -ter Ordnung approximieren läßt.  $(n - p - q)(1 - \lambda)/\lambda$  ist bei festem  $p$  und  $q$  asymptotisch wie  $\chi^2$  mit  $q$  Freiheitsgraden verteilt. Wird aber die Anzahl der zu schätzenden Parameter  $p + q$  vergleichbar mit  $n$ , dann strebt die Verteilung von  $\lambda$  gegen die Verteilung des Quotienten aus dem geometrischen und arithmetischen Mittel von  $(n - 1)/2$  Periodogrammordinaten. Die Kumulanten dieser Grenzverteilung werden berechnet.

*E. Walter.*

**Whittle, P.:** The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure. Trabajos Estadist. 3, 43—57. spanische Zusammenfassg. 57 (1952).

Es wird ein Zeitreihenmodell behandelt, bei dem zu einer rein nichtdeterministischen Zeitreihe, deren Spektralfunktion  $p$  unbekannte Parameter enthält, eine deterministische Komponente hinzutritt, die sich durch eine  $q$ -gliedrige trigonometrische Reihe darstellen läßt. Schätzgleichungen für die  $p + 3q$  Parameter und die asymptotische Kovarianzmatrix der Schätzwerte werden aufgestellt. Außerdem werden praktische Wege zur Lösung der Gleichungen sowie zum Testen der Parameter diskutiert.

*E. Walter.*

**\*Mann, Henry B.:** On the estimation of parameters determining the mean value function of a stochastic process. Sankhyā 12, 117—120 (1952).

**Chartier, F.:** L'estimation statistique dans le cas d'observations non indépendantes. Étude d'un cas particulier. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1, Nr. 4, 1—38 (1952).

Zerfällt in vier nicht unmittelbar zusammenhängende Teile. I. Ein Unabhängigkeitstest: Sei  $M$  die Mediane einer Stichprobe  $x_1, \dots, x_n$  und  $d_i = x_i - M$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Man betrachte das Vorzeichen der  $d_i$  (ihr Verschwinden wird nicht in Betracht gezogen) und benützt die Länge der Iterationen gleicher Vorzeichen (oder eine leichte Modifikation) zur Konstruktion eines Testes, der offensichtlich nur für große  $n$  asymptotisch gültig ist. Die Gütefunktion wird untersucht. II. Ein Unabhängigkeitstest wird unter Verwendung des zyklischen Korrelationskoeffizienten vorgeschlagen. Für ähnliche Untersuchungen für Zeitreihen vgl. Koopmans, dies. Zbl. 60, 310. Eine Tabelle der wichtigsten Perzentile der Verteilung des benützten Korrelationskoeffizienten für eine Reihe von Werten  $n \geq 5$  ist beigefügt. III. Studiert den Fall der Schätzung der Parameter in einer stationären Markoffschen Kette mit Gaußscher Verteilung. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß im wesentlichen dasselbe Problem bei Linnik, dies. Zbl. 39, 351 erledigt ist. IV. Numerische Beispiele zu I—III.

*L. Schmetterer.*

**Fourgeaud, Claude et Robert Féron:** Quelques remarques sur l'estimation des variations saisonnières. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1, Nr. 3, 21—25 (1952).

Es sei  $X(t) = y(t) + at + \varepsilon_t$  ein Prozeß, in dem  $y(t)$  eine periodische, für ganzzahlige  $t$  definierte Funktion ist,  $a$  eine Konstante und  $\varepsilon_t$  eine Folge von orthogonalen Zufallsvariablen derselben Verteilung. Es wird die Aufgabe behandelt, aus einer Beobachtungsreihe  $x(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, n$  Schätzwerte für  $a$  und die diskreten Werte  $y_j$  einer Periode von  $y(t)$  anzugeben. Hierzu wird die Buys-Ballot-Tafel benutzt. Weiter wird die Abnahme der Genauigkeit untersucht, wenn die Einzelbeobachtungen zu Gesamtwerten einer größeren Zeiteinheit zusammengefaßt werden. Schließlich wird noch der Verlust an Information beschrieben, der aus dem Fehlen einzelner Beobachtungen folgt.

*F. Weber.*



Kosten, L.: On the accuracy of measurements of probabilities of delay and of expected times of delay in telecommunication systems. I: Estimation of probabilities of delay. II: Estimates of average times of delay. Appl. sci. Research, B 2, 108—130, 401—415 (1952).

The author deals with problems of telephone waiting systems. The following assumptions are made: The calls form a Poisson process with density  $a$ , the number of available lines is  $c$ , the maximal number of the calls waiting simultaneously is  $n$  (finite or infinite) and the distribution function of the holding time is  $1 - e^{-t}$  (if  $t \geq 0$ ). It is supposed that the process is stationary. Denote the number of the occupied lines in the instant  $t$  by  $\xi_t$ , the number of the waiting calls in the instant  $t$  by  $\eta_t$  and the instants of the calls by  $\{t_k\}$  and let us put  $P(\xi_t = r, \eta_t = 0) = u_r$  ( $r = 0, 1, \dots, c$ ) and  $P(\xi_t = c, \eta_t = \varrho) = v_\varrho$  ( $\varrho = 0, 1, \dots, n$ ). In part I the author determines  $W_d = \sum_{\varrho=0}^n v_\varrho$ , the probability of delay and deals with the estimates of  $W_d$ . For this purpose the number of delayed calls in the time interval  $(0, t)$  and the total time during which all lines are occupied in the time interval  $(0, t)$ , resp., are considered. The author determines the Laplace transforms of the distributions of these random variables and in case  $n = \infty$ , for  $t \rightarrow \infty$ , the asymptotic expressions of the averages and variances of these distributions. Finally the author gives some numerical examples, calculated by means of tables of random numbers. In part II, for  $n = \infty$ , the author deals with the estimates of  $\tau_d = \frac{1}{a W_d} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \varrho v_\varrho = \frac{1}{c-a}$  the average time of delay. Three methods are given, which are based on the investigation of the random variables  $\sum_{0 \leq t_k \leq t} \eta_{t_k}$  and  $\int_0^t \eta_u du$ . The author gives the Laplace transforms of the distributions of these variables and, for  $t \rightarrow \infty$ , the asymptotic expressions of the averages and variances of these distributions. Finally the author compares the accuracy of the different estimates and gives a numerical example.

L. Takács.

Siegel, Laurence and Edward E. Cureton: Note on the computation of biserial correlations in item analysis. Psychometrika 17, 41—43 (1952).

Burke, Paul J.: IBM computation of sums of products for positive and negative numbers. Psychometrika 17, 231—233 (1952).

French, John W.: A technique for criterion-keying and selecting test items. Psychometrika 17, 101—106 (1952).

Sandler, Joseph: A technique for facilitating the rotation of factor axes, based on an equivalence between persons and tests. Psychometrika 17, 223—229 (1952).

Appel, Valentine: Companion nomographs for testing the significance of the difference between uncorrelated percentages. Psychometrika 17, 325—330 (1952).

Sichel, Herbert S.: The selective efficiency of a test battery. Psychometrika 17, 1—39 (1952).

Bei einer psychologischen Eignungsprüfung werden diejenigen Prüflinge angenommen, für die die aus der Testbatterie resultierende Note  $x$  die Grenze  $\alpha$  überschreitet; erwünscht sind Personen, deren wahre durch  $x$  zu testende Fähigkeit  $y$  die Grenze  $\beta$  überschreitet. Unter der Annahme, daß die standardisierten Variablen  $x, y$  binormal  $[f(x, y) dx dy]$  verteilt seien mit Korrelation  $\varrho$ , bestimmt Verf. die Applikanten-Operationscharakteristik (A. O. C.), d. h. die bedingte Wahrscheinlichkeit für eine Person der Fähigkeit  $y$ , angenommen zu werden,

$$\Pr \{x \geq \alpha | y\} = \pi(y) = \Phi \{(\alpha - \varrho y) / \sqrt{1 - \varrho^2}\},$$

und die Prüfer-Operationscharakteristik (S. O. C.), d. h. die analoge bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein mit Note  $x$  angenommener Prüfling sich bewähre,

$$\Pr \{y \geq \beta | x\} = \pi(x) = \Phi \{(\beta - \varrho x) / \sqrt{1 - \varrho^2}\}$$

mit  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$ . Die Effizienz der Test-Batterie wird gemessen durch

$$H = \pi_2 - \pi_1 = \frac{1}{\varphi(\alpha) - \Phi(\beta)} \int_{\beta}^{\infty} \int_{\alpha}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

als Differenz der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein auf Grund der Prüfung Angenommener sich bewähre, und derjenigen, daß ein ohne Prüfung Angenommener sich bewähre. Im Qualitäts-Gewinn-Diagramm werden die Verteilungen von  $y$  unter Ungeprüften  $[erf(y) dy]$  und unter der

auf Grund der Prüfung Angenommenen verglichen  $[\varphi(y) dy - \text{erf}(y) \cdot \pi(y) dy / \Phi(x)]$ , im Kosten-Utilitäts-Diagramm  $\text{erf}(y)$  und  $\varphi(y) \cdot \Phi(x) = \text{erf}(y) \cdot \pi(y)$ . Für  $\pi(x)$  und  $\pi(y)$  gibt Verf. geeignete Schätzer und Schätzintervalle, ferner solche für den Mittelwert von  $x$  unter den Ausgewählten und für den Anteil der sich Bewährenden unter den mit Note  $x$  Angenommenen. Mathematisch gesehen, handelt es sich im wesentlichen um gestutzte Binormalverteilungen.

M. P. Geppert.

**Plumlee, Lynnette B.:** The effect of difficulty and chance success on item-test correlation and on test reliability. *Psychometrika* 17, 69–86 (1952).

An equation is derived for predicting the effect of chance success, relative to item difficulty, on item-test correlation. The values, predicted by this equation and by equations derived by Guilford and Carroll for predicting the effect of chance success on item difficulty and test reliability are compared with empirical values in an experiment which used identical test items in multiple-choice and answer-only form.

Zusammenfassg. des Autors.

**Lord, Frederic M.:** The relation of the reliability of multiple-choice tests to the distribution of item difficulties. *Psychometrika* 17, 181–194 (1952).

**Guttman, Louis:** Multiple group methods for common-factor analysis: Their basis, computation, and interpretation. *Psychometrika* 17, 209–222 (1952).

Verf. greift folgende in einer früheren Arbeit [L. Guttman, *Psychometrika* 9, 1–16 (1944)] bewiesenen Sätze der Matrixtheorie auf: A. Ist  $G$  eine symmetrische positiv-definite  $n \times n$ -Matrix vom Rang  $r > 0$ ,  $X$  eine  $s \times n$ -Matrix (mit  $s \leq r$ ) und  $XGX'$  nicht singulär, so ist die Restmatrix

$$G_1 = G - GX'(XGX')^{-1}XG$$

vom Rang  $r - s$  und symmetrisch, positiv-definit. B. Ist  $S$  eine  $n \times N$ -Matrix vom Rang  $r > 0$ , sind  $X, Y$  zwei beliebige  $s \times n$ - und  $s \times N$ -Matrizen (mit  $s \leq r$ ), so daß  $XS Y'$  nicht singulär, so hat die Restmatrix

$$S_1 = S - SY'(XS Y')^{-1}XS$$

den Rang  $r - s$ . C. Ist  $R = SS'/N = FF'$ , wo die  $n \times N$ -Matrix  $S$  und die  $n \times r$ -Matrix  $F$  den Rang  $r$  haben, so läßt sich eindeutig eine  $r \times N$ -Matrix  $P$  bestimmen, für die  $S = FP$ ,  $P \cdot P'/N = I$  gilt. Diese Sätze führen, auf die Faktorenanalyse angewandt, zu einer Methode, die aus einer Korrelationsmatrix  $G$   $s$  gemeinsame Faktoren herauszuziehen erlaubt, zu einer analogen Methode für die Noten-(score)-Matrix  $S$  und zum Nachweis der Äquivalenz dieser beiden Operationen bei Benutzung der gleichen Gewichtsmatrix  $X$ . Die Gruppenmethode ist hierin als Spezialfall enthalten, wenn den Elementen der (beliebigen) Matrix  $X$  nur die Werte 0 und 1 erteilt werden. Der erforderliche Rechenvorgang wird in allen Einzelheiten vorgeführt und Schritt für Schritt in den Begriffen der Faktorenanalyse interpretiert.

M. P. Geppert.

**Adcock, C. J.:** A note on cluster-directed analysis. *Psychometrika* 17, 249–253 (1952).

Die Arbeit befaßt sich mit Verfahren, die für Thurstones multiple Gruppen-Methode der Faktorenanalyse erforderlichen Faktorachsen aus den Korrelationsklumpen zu bestimmen. Die Aufgabe, aus der Interfaktor-Korrelationsmatrix  $R_{pq}$  eine symmetrische Transformationsmatrix zu gewinnen, deren Multiplikation mit der ursprünglichen schiefen Faktormatrix eine Orthogonal-Transformation liefert, wird unter Heranziehung der Hauptachsen-Faktormatrix exakt gelöst. Um die langwierige Auffindung der Hauptachsen zu vermeiden, entwickelt Verf. eine bedeutend einfachere Näherungsmethode, bei welcher zunächst wie bei Thurstone eine Transformationsmatrix bestimmt wird und sodann eine orthogonale Korrekturmatrix, die erstere in symmetrische Form überführt.

M. P. Geppert.

**Tyler, Fred. T.:** Some examples of multivariate analysis in educational and psychological research. *Psychometrika* 17, 289–296 (1952).

**Ayers, J. Douglas and J. Perham Stanley:** The rolling totals method of computing sums, sums of squares, and sums of cross-products. *Psychometrika* 17, 305–310 (1952).

**Gibson, W. A.:** Orthogonal and oblique simple structures. *Psychometrika* 17, 317–323 (1952).

Verf. approximiert die geeignetste Transformationsmatrix für eine orthogonale einfache Struktur durch Normierung der Spalten der Summenmatrix  $A + T'$  aus der bekannten schiefen einfachen Struktur  $A$  und  $T'$ , wo  $R_{pq} = T T'$  die ursprüngliche Korrelationsmatrix bedeutet. Das Verfahren wird an einem von L. L. Thurstone (Multiple-factor analysis, Chicago 1947) behandelten Beispiel illustriert. — Drei verschiedene, auf dem Prinzip der kleinsten Quadrate beruhende, umständlichere Lösungen des gleichen allgemeinen Problems gab B. F. Green jr. (The orthogonal

approximation of an oblique structure in factor analysis, Research Bull. 51—18, Princeton 1951; vgl. nachstehendes Referat). *M. P. Geppert.*

Green, Bert F.: The orthogonal approximation of an oblique structure in factor analysis. Psychometrika 17, 429—440 (1952).

Hat für zwei  $k \times m$ -Matrizen mit  $k \geq m$  die Matrix  $A' B$  den Rang  $m$ , so ist eine orthogonale  $m \times m$ -Matrix  $A$  so zu bestimmen, daß die Quadratsumme der Elemente der Differenzenmatrix  $(A \cdot A - B)$  minimal sei. Verf. findet die Lösung dieser Aufgabe in der Form

$$A = (A' B B' A)^{-1/2} \cdot A' B \text{ mit } (A' B B' A)^{-1/2} = P D^{-1/2} P',$$

wo  $P, D$  die für die quadratische  $m \times m$ -Matrix  $A' B B' A$  mit Rang  $m$  notwendig existierenden,  $A' B B' A = P D P'$  erfüllenden, aus den Eigenvektoren bzw. Eigenwerten von  $A' B B' A$  gebildeten Orthogonal- und Diagonalmatrizen sind. Dieses Resultat wendet Verf. in der Faktorenanalyse an zur Bestimmung einer Orthogonalstruktur, die sich einer gegebenen schiefen Struktur bestmöglich anpasse (vgl. vorstehendes Referat); und zwar im Verfahren 1) auf  $A = F =$  Original-Faktormatrix mit  $k$  Testen und  $m$  Faktoren und  $B = V =$  endgültige schiefe Faktormatrix; im Verfahren 2) auf  $B =$  Einheitsmatrix,  $A = G'$ , wo  $G$  die schiefe Transformation bedeutet, deren Spalten die Richtungscosinus der Bezugsvektoren bezüglich der ursprünglichen unkorrelierten Faktoren angeben; im Verfahren 3) analog mit der Matrix  $H$  der primären Achsen an Stelle von  $G'$ . — Verf. dehnt seine allgemeine Methodik auf den Fall von  $r$  linear unabhängigen fixierten Vektoren aus, in welchem die analoge Aufgabe in dem hierzu orthogonalen  $(m - r)$ -dimensionalen Raum der übrigen  $m - r$  Vektoren zu lösen ist.

*M. P. Geppert.*

Cureton, Edward E.: Note on the scaling of ratings or rankings when the numbers per subject are unequal. Psychometrika 17, 397—399 (1952).

$N$  Personen werden von mehreren Beurteilern mit Rangzahlen versehen, so zwar, daß Person  $i$  nur  $n_i$  Rangzahlen mit Mittelwert  $M_i = SX_i/n_i$  erhält. Da der Vergleich der  $M_i$  untereinander durch die Abhängigkeit der Binnen-Varianzen von  $n_i$  erschwert ist, empfiehlt Verf. Verwendung der erwartungstreuen Schätzung  $X_{\infty} = (1 - r_i) M + r_i M_i$  für die bei unendlich vielen Richtern zu erwartende „wahre“ Rangzahl der Person  $i$ ; hierbei ist  $M = \sum SX_i / \sum n_i$  das Gesamtmittel aller erhaltenen Rangzahlen,

$$r_i = n_i r_j / [1 + (n_i - 1) r_j] \text{ mit } r_1 = (s_p^2 - s_e^2) / [s_p^2 + (k - 1) s_e^2],$$

o  $k = [(\sum n_i^2 - \sum n_i^2) / (N - 1) \sum n_i]$ , und  $s_e^2$  und  $s_p^2$  Gesamt-Binnen- und Zwischen-Varianz bedeuten.

*M. P. Geppert.*

Torgerson, Warren S.: Multidimensional scaling. I: Theory and method. Psychometrika 17, 401—419 (1952).

Einem Modell von M. W. Richardson [Psychol. Bull. 35, 659 (1938)] folgend, werden bei der „vollständigen Triaden-Methode“ jeder Versuchsperson die  $n$  verschiedenen Reize in  $\binom{n}{3}$  Triaden  $k, i, j$  geboten, und der Proband entscheidet, ob Reiz  $j$  oder Reiz  $i$  dem Reiz  $k$  nähersteht. Aus den  $n$  Matrizen  ${}_k p_{ij}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) der relativen Häufigkeit  ${}_k p_{ij}$ , mit welcher der Abstand  $kj$  kürzer als  $ki$  beurteilt wird, werden auf Grund von Normalverteilung Distanzdifferenzen

${}_k x_{ij}$  durch  ${}_k p_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{kx_{ij}} e^{-x^2/2} dx$  ermittelt. Minimalisierung der Quadratsumme

$$\sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n [{}_k x_{ij} - (d_{ik} - d_{kj})]^2$$

ergibt die Vergleichsdistanzen

$$d_{..} - d_{gh} - ({}_g x_{..} + {}_g x_{.h} + {}_h x_{.g} + {}_h x_{..})/2,$$

wobei  ${}_g x_{..}$  etc. in üblicher Weise Mittelwerte der  ${}_k x_{ij}$  bedeuten. Um aus diesen Vergleichsdistanzen die absoluten Distanzen zu gewinnen, muß die in ihnen enthaltene additive Konstante  $d_{..}$  geschätzt werden; dies geschieht bei fehlerlosen Beobachtungen auf Grund von Ergebnissen von G. Young und A. S. Householder [Psychometrika 3, 19—22 (1938)], indem man von der symmetrischen  $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrix  $B_i$  der  $b_{jk} = (d_{ij}^2 + d_{ik}^2 - d_{jk}^2)/2$  verlangt, daß die aus ihr durch Verschiebung des Anfangspunktes vom Punkte  $i$  nach der Mitte der  $n$  Punkte entstehende positiv semidefinite Matrix  $B_i^*$  durch geeignete Wahl von  $d_{..}$  kleinstmöglichen Rang erhalte. Für fehlerbehaftete Beobachtungen wird das Verfahren entsprechend modifiziert. Der Rang von  $B_i^*$  liefert nach Young und Householder die minimale Dimensionszahl des reellen Euklidischen Raumes, der die Deutung der absoluten Distanzen als Entfernungen zwischen seinen Punkten erlaubt. Faktorenanalyse von  $B_i^* = A_i^* \cdot A_i^{*'}$  liefert sodann die Projektionen der Reize  $j$  auf beliebige Achsen des besagten Euklidischen Raumes.

*M. P. Geppert.*

Lyerly, Samuel B.: The average Spearman rank correlation coefficient. Psychometrika 17, 421—428 (1952).



Aus  $N$  Rangordnungen  $x_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, N$ ) der Zahlen 1 bis  $n$  und einer Standard-Rangordnung  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) lassen sich durch Betrachtung der  $N + 1$  demselben Individuum  $i$  erteilten Ränge  $x_{ij}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) und  $y_i$   $N$  Spearmansche Rangkorrelationskoeffizienten  $\rho_j$  (zwischen  $x_{ij}$  und  $y_i$ ) berechnen. Verf. zeigt, daß ohne deren Kenntnis die durchschnittliche Rangkorrelation direkt bestimmbar ist als

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \rho_j = 1 - \frac{2(2n+1)}{n-1} + \frac{12}{N(n^2-1)} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^N x_{ij}.$$

Am Beispiel  $n = N = 4$  wird gezeigt, wie sich unter der Nullhypothese der Unabhängigkeit die exakte Verteilung von  $\rho$  in Stichproben berechnen läßt, und an deren ersten 4 Momenten wird ihre gute Übereinstimmung mit Normalverteilung erwiesen.

M. P. Geppert.

**Gebelein, Hans:** Einige Ergebnisse der Betrachtungsweise auf der Streuungsstufe (Streuungskalkül). *Mittel.-Bl. math. Statistik* 4, 173–182 (1952).

Verf. betrachtet die Varianz  $\text{Str}^2(z)$  von Linearkombinationen  $z = \sum A_i y_i$  korrelierter Zufallsvariabler  $y_i$  ( $A_i$  Gewichte) und in Analogie  $\text{Str}^2(z)$  von  $z = \int f(x) y(x) dx$  mit  $f(x)$  als Gewichtsfunktion.  $\text{Str}^2(z)$  wird als Funktion der Autokorrelation von  $y(x)$  ausgedrückt. Anwendungen u. a. in der Periodogramm-analyse werden gegeben.

E. Walter.

**Führer, Irmgard:** Theoretische Untersuchung der Jahresschwankung unseres Zeitnormals. *Diss. math.-naturw. Fakultät Münster* 2, 13–14 (1952).

### Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

**Masuyama, Motosaburo:** Recent advances in biometry in Japan. *Bull. Inst. internat. Statist.* 33, Nr. 2, 341–348 (1952).

Cet article fournit un compte-rendu succinct des recherches biostatistiques au Japon durant et après la seconde guerre mondiale suivi d'une bibliographie.

Aus der franz. Zusammenfassg.

**Henry, Louis:** Descendance d'un élément de population. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 1, Nr. 3, 17–21 (1952).

Der (von A. J. Lotka (dies. Zbl. 21, 340) gefundene Satz, daß die Nachkommenschaft einer beliebigen geschlossenen Anfangsbevölkerung mit zeitunabhängiger Sterblichkeit und Fruchtbarkeit asymptotisch exponentiell wächst, wobei die intrinske Wachstumsrate  $\rho$  sowie die Altersverteilung der stabilen Grenzbevölkerung nicht von der ursprünglichen Altersverteilung abhängen, wird neu bewiesen durch direkte Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung der Geburtszeitpunkte  $\theta$  der  $n$ -ten Generation,

$$f_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{-it\theta} e^{n\psi(t)} dt$$

aus der zweiten charakteristischen (Kumulanten-erzeugenden) Funktion  $\psi(t)$  von  $p(a) m(a) R^{-1}$  (in Lotkas Bezeichnungsweise), d. h. der Verteilung des mütterlichen Alters bei Geburt einer Tochter. Einführung der Verteilung  $e^{-a\rho} p(a) m(a) da$  und deren zweiter charakteristischer Funktion

$$\psi_1(t) = \psi(t + i\rho) - \psi(i\rho)$$

und Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes ergibt asymptotische Normalität von  $f_n(\theta)$ .

M. P. Geppert.

**Tricomi, Francesco G.:** Un problema di statistica matematica sorto dalla batteriologia. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 15, 25–39 (1952).

Es wird ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell betreffend die Verteilung der Zahl der gegen Bakteriophagen resistenten Bakterien betrachtet. Die allgemeine Behandlung der Fragestellung führt über die mehrdimensionale Poissonverteilung; unter speziellen, bakteriologisch interessanten Bedingungen findet man eine beträchtlich schiefe Verteilung. Diese Verteilung wird unter Benutzung funktionentheoretischer Methoden hergeleitet, wobei die Funktion  $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n! (2^n - 1)}$  auftritt. Für  $-2 < t < +2$  ist diese Funktion (an anderer Stelle) tabuliert; für große und kleine  $t$ -Werte werden Näherungsausdrücke gegeben. Auf Grund der Lage

des Maximums der Kurve kann man Aussagen über die Wahrscheinlichkeit resistenzerzeugender Mutationen gewinnen. [Druckfehler in Gl. (11); es fehlt der Faktor  $\lambda$ .]  
O. Ludwig.

Miller, George A.: Finite Markov processes in psychology. Psychometrika 17, 149—167 (1952).

Die vorliegende Arbeit untersucht die Möglichkeit der Anpassung des Begriffes einer einfachen Markoffschen Kette an die Beschreibung der psychologischen Daten eines Erlernungsprozesses, insbesondere die Bestimmungsart der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix auf Grund der empirisch erhaltenen Frequenzen. Die Bewertung dieser Matrix erfolgt durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Sei  $M$  die Matrix der im Zeitpunkte 1, 2, ...,  $n-1$ ,  $n$ , beobachteten Frequenzen, für jede der  $a$  Eigenschaften eines gegebenen Kollektivs, und  $N$  die Matrix derselben Frequenzen, aber im Zeitpunkte 2, 3, ...,  $n$ . Die Bewertung der Matrix  $T$  der Übergangswahrscheinlichkeiten, gemäß der hier angewendeten Art der Methode der kleinsten Quadrate, ist  $T = N M' (M M')^{-1}$ , wobei der Strich ' die Transposition der bezüglichen Matrix bezeichnet. Die Formel ist selbstverständlich nur dann gültig, wenn die Matrix  $M M'$  eine Inverse hat. Was den Erlernungsprozeß betrifft, geht die Bestätigung einer Anwendbarkeit der Markoffschen Kette — somit der Konstanz der Matrix  $T$  — im Falle jeder der Werte, die wir für  $p_{jk}$  bekommen haben, von 0 verschieden ist und also die Kette ergodisch sein müßte, aus der Tatsache hervor, daß, von einem gewissen Zeitpunkte an, die Frequenzen nur zufällige Variationen haben. Wenn  $T$  nicht als Konstante angesehen werden kann, wird eine Bewertung derselben, mittels einer Korrektionsmatrix  $V$  und eines Parameters  $w$ , durch die folgende Darstellung  $T(n) = w T(n-1) + (1-w) V$  vorgeschlagen.  
O. Onicescu.

Miller, George A. and William J. McGill: A statistical description of verbal learning. Psychometrika 17, 369—396 (1952).

In  $n$  Versuchen werden jeweils die gleichen  $N$  Wörter der Versuchsperson vorgelesen, die nach jedem Versuch aus dem Gedächtnis die Wörter aufschreibt. Ein Wort ist im Zustand  $A_k$ , wenn es in genau  $k$  vorangehenden Versuchen erinnert (aufgeschrieben) worden ist. Die Übergangswahrscheinlichkeit  $\tau_k$ , vom Zustand  $A_k$  beim nächsten Versuch in  $A_{k+1}$  zu gelangen, sei für alle  $N$  Wörter gleich. Die Wahrscheinlichkeit  $p(A_k, n)$  für ein Wort, beim Versuch  $n$  im Zustand  $A_k$  zu sein, ergibt sich durch Lösung der Differenzgleichung

$$p(A_k, n+1) = p(A_k, n)(1-\tau_k) + p(A_{k-1}, n)\tau_{k-1}$$

$$\text{als } p(A_0, n) = (1-\tau_0)^n, \quad p(A_k, n) = \tau_0 \tau_1 \cdots \tau_{k-1} \sum_{i=0}^k (1-\tau_i)^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (\tau_j - \tau_i), \quad (k > 0).$$

Unter der Annahme  $\tau_k \neq \tau_j$  ( $j \neq k$ ),  $\tau_k > 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = m \leq 1$  zeigen Verff., daß die Gesamtwahrscheinlichkeit für ein Wort, beim Versuch  $n+1$  erinnert zu werden,  $q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k p(A_k, n+1) = \sum_{k=0}^n k p(A_k, n) + \sum_{k=0}^n \tau_k p(A_k, n)$ , für  $n \rightarrow \infty$  ebenfalls gegen  $m$  strebt. Setzt man  $X_{i,k,n+1} = 1$  nur dann, wenn Wort  $i$  bei Versuch  $n+1$  aus Zustand  $A_k$  in  $A_{k+1}$  übergeht, und = 0 in allen anderen Fällen, so ist  $r_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^N X_{i,k,n+1}$  ein erwartungstreuer Schätzer

für  $q_{n+1}$  mit  $\text{var } r_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n p(A_k, n) \tau_k (1-\tau_k)$ . Für  $\tau_k$  ermitteln Verff. den plausibelsten (Maximum-likelihood-) Schätzer:  $t_k = \frac{\sum_i \sum_j X_{i,j,k,n+1}}{\sum_i N_{i,k,n}}$ , wo  $N_{i,k,n}$  die Anzahl der nach Versuch  $n$  in  $A_k$  befindlichen Wörter ist. Insbesondere wird der Fall behandelt, in welchem  $\tau_k$  der Differenzgleichung  $\tau_{k+1} = a + \alpha \cdot \tau_k$  mit  $0 \leq a \leq 1 - \alpha \leq 1$ ,  $\tau_0 = p_0$ , genügt, deren explizite Lösung  $\tau_k = a/(1-\alpha) - [a/(1-\alpha) - p_0] \cdot \alpha^k$  lautet; er ordnet sich als Spezialfall  $Q_2 p = p$  in die von R. R. Bush und F. Mosteller (A linear operator model for learning. Boston 1951; vgl. R. R. Bush und F. Mosteller: Stochastic models for learning, dies. Zbl. 64, 310) entwickelte Theorie ein. Die Ergebnisse werden an experimentellen Daten illustriert. Überdies wird das Modell mengentheoretisch interpretiert.  
M. P. Geppert.

Ross, Ian C. and Frank Harary: On the determination of redundancies in sociometric chains. Psychometrika 17, 195—208 (1952).

Die nicht reflexive und nicht notwendig symmetrische Relation der Kommunikation „ $i$  kommuniziert mit  $j$ “ zwischen  $n$  Personen wird durch eine im allgemeinen asymmetrische

$n \times n$ -Matrix  $M$  mit Hauptdiagonale 0 und den Stellen 1 bei Kommunikation, 0 bei Nicht-Kommunikation dargestellt.  $i_1 i_2 \dots i_{s+1}$  heißt ein  $s$ -Schritt-Weg von  $i_1$  nach  $i_{s+1}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , wenn  $i_k$  mit  $i_{k+1}$  kommuniziert; ein  $s$ -Schritt-Weg ist redundant, wenn es ein  $k$  und ein  $l$  gibt,  $k \neq l$ , so daß  $i_k = i_l$  ist. Die Stellen  $i, j$  der Matrix  $M^s$  geben die Anzahl aller  $s$ -Schrittwege zwischen  $i$  und  $j$  an. Verf. bestimmen  $R_s$ , die Matrix der redundant  $s$ -Schritt-Wege, für  $s = 3, 4, 5, 6$ , z. B.  $R_3 = M \cdot d(M^2) + d(M)^2 \cdot M - M \times M'$ . Darin bedeutet  $d(A)$  die Matrix mit derselben Hauptdiagonalen wie  $A$  und den übrigen Stellen 0;  $A \times A' = (a_{ij} a_{ji})$ . — Für den allgemeinen Fall sagen Verf., auf welche Weise  $R_s$  zu finden ist, wenn  $M$ ,  $s$  und „genügend Zeit“ gegeben sind.

H. Härten.

**Votaw, D. F.:** Methods of solving some personnel-classification problems. Psychometrika 17, 255—266 (1952).

Die Produktivität jeder von  $N$  Personen in jedem von  $N$  jobs sei bekannt. Die Aufgabe, die Gesamtproduktivität  $\sum c_{ij} x_{ij}$  zu maximieren,  $c_{ij}$  = Produktivität der Arbeiter der Kategorie  $i$  in der Beschäftigungskategorie  $j$ ,  $x_{ij}$  = relative Anzahl der  $i$ -Arbeiter, die im  $j$ -job beschäftigt werden,  $\sum x_{ij} = 1$ , wird vom Verf. mit der „simplex-Methode“ („Activity analysis of production and allocation“, Cowles Comm. Monograph No. 13, New-York 1951, Kap. XXIII) durch schrittweise Approximation für den allgemeineren Fall gelöst, daß die Personen in  $m$  gleich-

wertige Kategorien zerfallen,  $N = \sum_1^m a_i$ , die jobs in  $n$  gleichwertige Kategorien,  $N = \sum_1^n b_j$ .

Ein Beispiel mit  $m = 4$ ,  $n = 3$  wird durchgerechnet:

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit Lösung } (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,15 & 0 \end{pmatrix}.$$

H. Härten.

**Lord, Frederic M.:** Notes on a problem of multiple classification. Psychometrika 17, 297—304 (1952).

$N_i$  Leute sollen dem  $i$ -ten von  $n$  jobs zugeteilt werden,  $\sum N_i = N$ .  $x_{ia}$  sei die Produktivität des Mannes  $a$  im job  $i$ ,  $w_i$  das Gewicht, das dem job  $i$  zugeteilt ist.  $Q = w_1 \sum x_{1a} + w_2 \sum x_{2a} + \dots + w_n \sum x_{na}$  ist zu maximieren, Summen über alle  $a$ . Verf. sucht im Gegensatz zu Votaw (vgl. vorsteh. Referat) eine allgemeine, theoretische Lösung, kein Rechenverfahren. Für  $n = 2$  findet er, daß das Optimum der Zerlegung der Ebene durch die Grenzgerade  $w_1 x_1 = w_2 x_2 + k$  entspricht, wenn jede der  $N$  Personen durch einen Punkt  $(x_1, x_2)$  dargestellt wird;  $k$  ist so zu bestimmen, daß  $N_1$  Punkte in die eine Halbebene fallen,  $N_2$  in die andere. Im  $n$ -dimensionalen Fall werden die Grenzen durch  $n(n-1)/2$  Hyperebenen der Dimension  $n-1$  gebildet, dargestellt durch  $w_i x_i = w_j x_j + k_{ij}$ , jede parallel zu allen Achsen außer  $x_i$  und  $x_j$ , alle sich in einer Geraden schneidend, mit Matrix vom Rang  $n-1$ . Für  $n = 3$  werden die Grenzebenen z. B. durch die Matrix vom Range 2 dargestellt

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2 & 0 & k_{12} \\ w_1 & 0 & -w_3 & k_{13} \\ 0 & w_2 & -w_3 & k_{23} \end{pmatrix}.$$

Verf. gibt die multiplen Integrale an, wenn das Punkte-Diagramm durch eine Verteilungsfunktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  gegeben ist. Schließlich behandelt er den Fall, daß einige Personen keinem job zugeteilt werden. Sie liegen in einer Ablehnungsregion, deren  $n$  Seiten Hyperebenen parallel zu  $n-1$  Achsen sind; alle Seiten gehen durch einen Punkt der Geraden, in der sich die  $\frac{1}{2} n(n-1)$ -Grenz-Hyperebenen schneiden.

H. Härten.

**Charnes, A.:** Optimality and degeneracy in linear programming. Econometrica 20, 160—170 (1952).

Es handelt sich um eine Verbesserung der sogenannten Simplexmethode von Dantzig (vgl. dies. Zbl. 45, 98, 2. Referat). Dank der vom Verf. vorgenommenen Modifikation wird bei jedem Einzelschritt das Eintreten der „Entartung“ vermieden. Ferner ergeben sich systematisch alle optimalen Lösungen, und dies sowohl im „beschränkten“ wie im „unbeschränkten“ Fall.

H. Pietsch.



## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

● Kagan, F. B.: Grundlagen der Geometrie. Die Lehre von der Grundlegung der Geometrie im Laufe ihrer historischen Entwicklung. I. Teil. Geometrie von Lobačevskij und ihre Vorgeschichte. Unter redaktioneller Mitarbeit von Ja. S. Dubnov. II. Teil: Interpretation der Geometrie von Lobačevskij und Entwicklung ihrer Ideen. Unter redaktioneller Mitarbeit von G. B. Gurevič, Ja. S. Dubnov und P. K. Raševskij. Moskau: Staatsverlag für techn.-theoretische Literatur 1949; 1956. 492 S.; 344 S. R. 17,50; R. 15,— [Russisch].

Ein großangelegtes, ausführliches Werk, welches sehr reichhaltiges Material enthält und welches nach ursprünglicher Planung drei Teile (in 2 Bänden) enthalten sollte; aber der Tod des Verf. 1953 hat die volle Verwirklichung dieser Absicht verhindert. Der Inhalt des Werkes ist durch die Auffassung des Verf. bestimmt, daß dieser Zweig der Wissenschaft eigentlich nicht nur durch Aufstellung einer Axiomatik, auf der dann mit notwendiger Genauigkeit und Folgerichtigkeit das Gebäude der modernen Geometrie errichtet werden kann, charakterisiert wird, sondern daß dazu auch der gesamte Zyklus jener Ideen gehört, die auf dem Boden der Bestrebungen zur strengen Grundlegung der Geometrie im Laufe der geschichtlichen Entwicklung entstanden sind. — Der I. Teil (enthalten im I. Band), ist einer sehr ausführlichen Darstellung der Lobačevskijschen Geometrie gewidmet. Zuerst wird die Geschichte der Versuche, das Parallelenpostulat zu beweisen, gegeben und dann die gesamte ebene hyperbolische Geometrie in der gleichen Reihenfolge wie die gewöhnliche euklidische, d. h. elementare, analytische und differentielle, entwickelt. Im Kapitel VII wird die Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene und die Lehre von der Flächenmessung von geradlinigen Figuren gegeben. Im X. und letzten Kapitel sind dann die Grundlagen der hyperbolischen Geometrie des Raumes gegeben. — Der II. postume Band, welcher ursprünglich den II. und III. Teil des Werkes enthalten sollte, enthält nur den II. Teil und vom III. Teil nur das Kapitel über die Axiomatik der Geraden. Es ist die Geschichte der Anerkennung der Lobačevskijschen Geometrie und der Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit an Hand ihrer wichtigsten Interpretationen gegeben. Der axiomatische Aufbau der euklidischen Geometrie sowie der verschiedenen nichteuklidischen Geometrien ist unbearbeitet geblieben. Der II. Band wurde auf Grund des in sehr unvollendeter Form hinterlassenen Manuskriptes von den Mitgliedern des Seminars für Vektor- und Tensoranalysis der Moskauer Universität verfaßt. Der Beitrag dieser Bearbeiter ist bedeutend. Dieses Werk verdient Beachtung. Es ist technisch gut ausgestattet. Es enthält Namens- und Sachregister. 267 verschiedene Quellen wurden genannt.

*T. P. Angelitch.*

Maeda, Fumitomo: Embedding theorem of continuous regular rings. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 14, 1—7 (1948).

The author proves the following embedding theorem. Let  $\mathfrak{R}$  be a continuous regular ring, namely the set of all principal right ideals in  $\mathfrak{R}$  is a continuous complemented modular lattice. Let  $\Omega$  be the set of all maximal two-sided ideals of  $\mathfrak{R}$ . Then  $\mathfrak{R}$  is isomorphic to a subring of  $\prod (\mathfrak{R}/\alpha; \alpha \in \Omega)$  where  $\mathfrak{R}/\alpha$  are simple continuous regular rings. For its proof he applies the result of Y. Kawada, Y. Matsushima and K. Higuchi (this Zbl. 60, 324).

*Y. Kawada.*

Maeda, Fumitomo: Direct sums and normal ideals of lattices. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 14, 85—92 (1949).

The author considers general continuous geometries  $\{L\}$ , i. e. conditionally continuous, relatively complemented modular lattices with 0. For reducible  $L$  he

proves theorems on dimension function and subdirect representation which were proved for reducible continuous geometries by T. Iwamura (this Zbl. **60**, 324) and Y. Kawada, Y. Matsushima and K. Higuchi (this Zbl. **60**, 324). For that purpose he defines firstly the direct sum decomposition of a lattice with 0 (but without 1). Then instead of the center of a continuous geometry he uses the Boolean algebra of all normal ideals of  $L$ .

Y. Kawada.

**Sasaki, Usa:** On an axiom of continuous geometry. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **14**, 100—101 (1949).

The author considers the continuity axiom of a (reducible) continuous geometry of J. von Neumann and proves that a complemented modular lattice  $L$  is a continuous geometry if and only if  $L$  is a generalized topological lattice, i. e. a complete lattice in which  $\cup$  and  $\cap$  are continuous with respect to the order topology. Y. Kawada.

### Elementargeometrie:

**Brejcha, Josef:** The square as a limit of the quadrangles inscribed and tangential to the circle. Acta Acad. Sci. natur. Moravo-Silesiacae **24**, 347—358, russ. und engl. Zusammenfassg. 358 (1952) [Tschechisch].

On considère une suite de quadrilatères inscrits dans un même cercle telle que le premier quadrilatère de cette suite est arbitraire (convexe) et tout autre a pour sommets les centres des arcs de la circonférence donnée interceptés par les cotés du quadrilatère précédant. Les suites des angles intérieurs correspondants de ces quadrilatères tendent alors vers  $\frac{1}{2}\pi$ ; les points limites des suites des sommets correspondants sont situés dans les sommets d'un octogone régulier. Utilisant ces théorèmes, l'A. étudie des questions analogiques pour les quadrilatères circonscriptibles. Ces résultats ont été généralisés; voir Kosmák, Časopis Mat. **80**, 299—307 (1955), et une note de J. Hájek [ibid., **81**, 77—78 (1956) qui s'y rattache].

L. Kosmák.

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

• **Baer, Reinhold:** Linear algebra and projective geometry. (Pure and Applied Mathematics. Vol. II.) New York: Academic Press Inc., Publishers 1952. VIII. 318 p. \$ 6,50.

Das besondere Verdienst des vorliegenden Werkes besteht darin, daß es den Aufbau der analytischen Geometrie (projektiv) in der heute denkbar umfassendsten Weise durchführt. An Stelle des sonst üblichen Koordinatenbegriffs tritt hier eine beliebige lineare Mannigfaltigkeit  $(F, A)$ , d. h. eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe  $A$  mit einem Schiefkörper  $F$  als Operatorenbereich, über die keinerlei weitere Voraussetzungen gemacht werden. So kann der Rang der Mannigfaltigkeit gleich jeder beliebigen endlichen oder unendlichen Kardinalzahl sein. Da keinerlei Beschränkungen auf das Endliche gemacht werden, müssen naturgemäß mengentheoretische Hilfsmittel (Zornsches Lemma u. a.) herangezogen werden, um die für den Aufbau benötigten Sätze wie z. B. die Existenz einer Basis zu erhalten. Der durch eine solche lineare Mannigfaltigkeit definierte projektive Raum wird aufgefaßt als der Verband aller ihrer linearen Unterräume ( $\rightarrow$  Untermannigfaltigkeiten). Auch die Definition einer Projektivität erfolgt verbandstheoretisch, nämlich als eine eindeutige Abbildung des Verbandes einer linearen Mannigfaltigkeit  $(F, A)$  auf den einer zweiten  $(G, B)$ , welche die natürliche teilweise Ordnung (hinsichtlich des Enthaltenseins) erhält. Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie lautet hier: Ist der Rang der linearen Mannigfaltigkeit  $(F, A)$  mindestens 3, so wird jede Projektivität von  $(F, A)$  von einer semi-linearen Transformation induziert. Es folgen u. a. Untersuchungen über die Gruppe der Kollineationen, d. h. der Projektivitäten, bei denen der zugeordnete Automorphismus ein innerer ist. Dafür, wann eine

Projektivität eine Kollineation ist, werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben. Im Falle endlichen Ranges  $r(A)$  ist die Identität genau dann die einzige Kollineation, die  $r(A) + 1$  Punkte, von denen je  $r(A)$  linear unabhängig sind, festläßt, wenn der zugehörige Schiefkörper kommutativ ist. Die Dualitäten (Korrelationen) werden ebenfalls als eindeutige aber antimonotone Abbildungen  $\delta$  des Verbandes einer linearen Mannigfaltigkeit  $(F, A)$  auf den einer zweiten  $(G, B)$  erklärt ( $U \leq V \Leftrightarrow V^\delta \leq U^\delta$ ). Eine lineare Mannigfaltigkeit  $(F, A)$  besitzt genau dann eine duale, wenn der Rang  $r(A)$  endlich ist; sie ist zu einer zweiten  $(G, B)$  genau dann dual, wenn  $r(A) = r(B) < \infty$  und außerdem  $F$  und  $G$  antiisomorph sind, und sie ist selbstdual, wenn  $3 \leq r(A) < \infty$  ist und  $F$  einen Antiautomorphismus besitzt. Jede Autodualität einer linearen Mannigfaltigkeit  $(F, A)$  mit  $r(A) \geq 3$  wird durch eine semi-bilineare Form repräsentiert.  $(F, A)$  mit  $r(A) \geq 3$  besitzt dann und nur dann eine Polarität, wenn  $r(A)$  endlich ist und in  $F$  ein Antiautomorphismus existiert. Weiterhin werden Nullsysteme und Polaritäten (auf ihre Existenz, ihre isotropen und nichtisotropen Unterräume hin), Zerlegung des Raumes bezüglich einer Polarität, die Gruppe einer Polarität  $\delta$  (hierbei sind also insbesondere die unitären, symplektischen und orthogonalen Gruppen miteinbezogen) u. ä. untersucht. Ein weiteres Kapitel befaßt sich mit dem Endomorphismenring einer linearen Mannigfaltigkeit, besonders mit den engen wechselseitigen Beziehungen, die zwischen der linearen Mannigfaltigkeit und dem Endomorphismenring, zwischen den Projektivitäten und Ringisomorphismen und zwischen den Dualitäten und Ringantiisomorphismen bestehen. Eingehend werden auch die Gruppen der linearen und der semi-linearen Transformationen  $T(F, A)$  bzw.  $A(F, A)$  einer linearen Mannigfaltigkeit  $(F, A)$  studiert und hier vor allem die Äquivalenz der Aussagen — (I)  $T(F, A) \sim T(G, B)$ , (II)  $A(F, A) \sim A(G, B)$ , (III)  $(F, A)$  und  $(G, B)$  sind projektiv äquivalent oder dual zueinander — bewiesen. Im Schlußkapitel wird die projektive Geometrie synthetisch behandelt. Den Ausgangspunkt bildet hier ein komplementärer vollständiger modularer und atomarer Verband, der noch zwei weiteren verbandstheoretischen Forderungen zu genügen hat, damit er als Verband einer linearen Mannigfaltigkeit gekennzeichnet ist. Das Ziel ist wie üblich die „Koordinateneinführung“, d. h. hier die Konstruktion der linearen Mannigfaltigkeit, die dem Verband zugeordnet ist. Dieses wertvolle Werk zeichnet sich u. a. aus durch eine erstaunliche Fülle des Materials, durch Präzision in Begriffsbildung und Beweisführung und durch die Tatsache, daß genau aufgezeigt wird, unter welchen allgemeinen Voraussetzungen die Sätze der klassischen analytischen Geometrie bzw. ihre Verallgemeinerungen noch gültig sind. Die ausgesprochene Absicht des Buches, „die wesentliche strukturelle Identität von projektiver Geometrie und linearer Algebra“ herauszuarbeiten, ist eindrucksvoll verwirklicht.

H. Karzel.

Cuesta, N.: Projektive Strukturen. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 107—128 (1952) [Spanisch].

In Kap. I wird der komplexe projektive Raum als Verband der Untervektorräume eines Vektorraums  $V$  über dem Körper der komplexen Zahlen dargestellt. Kap. II behandelt die reellen Unterräume. Die Anzahl  $\alpha$  der linear unabhängigen Vektoren eines komplexen Unterraums  $A \subseteq V$  heißt die Charakteristik von  $A$ ; die Charakteristik von  $V$  sei  $v$ . Die Menge  $A^0$  der reellen Vektoren von  $A$  bildet einen reellen Vektorraum, dessen Charakteristik  $\alpha^0$  die Werte  $2\alpha - v \leq \alpha^0 \leq \alpha$  annehmen kann. Jedem  $A$  wird das Zahlenpaar  $(\alpha, \alpha^0)$  zugeordnet. Es werden Sätze über diese Charakteristikenpaare beim Übergang zum konjugiert komplexen Vektorraum, Durchschnitt zweier Vektorräume usw. abgeleitet. Im dreidimensionalen Raum sind durch die möglichen Charakteristikenpaare die von von Staudt unterschiedenen Typen reeller und imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen gekennzeichnet.

H. Gericke.



**Natucci, Alpinolo:** Il teorema fondamentale delle proiettività. Giorn. Mat. Battaglini 81 (V. Ser. 1), 5—41 (1952).

Diese Monographie analysiert und klassifiziert die bekannten Beweise des Fundamentalsatzes der projektiven Beziehungen und gibt die Entwicklungsgeschichte des Problems. Die Klassifizierung beruht auf folgenden drei Definitionen der Projektivität. (1) Durch endlichmalige Anwendung des Projizierens und Schneidens erzeugt ein-eindeutiges Entsprechen der Elemente zweier Grundgebilde erster Stufe (Poncelet-Cremona). (2) Ein solches ein-eindeutiges Entsprechen der Elemente zweier Grundgebilde erster Stufe, welches das Doppelverhältnis unverändert erhält (Steiner-Chasles). (3) Ein solches ein-eindeutiges Entsprechen der Elemente zweier Grundgebilde erster Stufe, bei welchem einem harmonischen Quadrupel ein harmonisches Quadrupel entspricht (Staudt). Die Arbeiten von Klein, Darboux, Reye, Pieri, Enriques, Bertini, Severi, Le Paige-Deruyts, Schur, Cassina, Heffter und besonders diejenigen von Comessati werden ausführlich behandelt. Von neueren ist nicht die Rede, erwähnt wird noch eine Arbeit von Hodge und Pedoe. F. Kárteszi.

**Deaux, R.:** Sur quatre homographies binaires. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 23—29 (1949).

Gegeben seien die beiden komplexen, projektiven Geraden  $\varphi$  und  $\varphi'$ . Die projektiven Transformationen  $\omega$  von  $\varphi$  auf  $\varphi'$  lassen sich den Punkten eines Raumes  $X_3$  eindeutig zuordnen, in dem die Quadrik  $Q_2$  die Bildmenge der entarteten Abbildungen ist. Folgende Frage liegt dann vor: Gibt es 4 Projektivitäten  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) mit  $\omega_i(P) = P^i$ , derart daß  $DV(P^1, P^2, P^3, P^4)$  unabhängig von der Wahl des Punktes  $P$  auf  $\varphi$  ist? Dies ist der Fall, wenn die 4 den  $\omega_i$  zugeordneten Punkte des  $X_3$  einer Geraden angehören. Außer dieser trivialen Lösung gibt es nur noch eine weitere Lösung der Frage, bei der die Bildpunkte der  $\omega_i$  ein  $Q_2$  umschriebenes Simplex  $T$  definieren. Die Geraden des einen Regulus von  $Q_2$  gehören dann einem der  $\infty^1$  durch  $T$  bestimmten tetraedralen Komplexe an. Verf. zeigt in der vorliegenden Arbeit weiter: Sind  $A, B, C, D$  und  $A', B', C', D'$  je 4 Punkte auf  $\varphi$  und  $\varphi'$  mit verschiedenen  $DV$  und bestimmt man  $\omega_1$  durch  $\omega_1(B) = B', \omega_1(C) = C', \omega_1(D) = D'$  sowie  $\omega_2, \omega_3$  und  $\omega_4$  analog, so erfüllen diese 4 Projektivitäten  $\omega_i$  die gewünschte Bedingung. Weiterhin gibt Verf. einen neuen Beweis des folgenden von Jolliffe (1925) stammenden Satzes: Die Ebenen des einer Quadrik  $Q_2$  eingeschriebenen Tetraeders  $T$  und des dazu polarreziproken Tetraeders  $T'$  schneiden eine beliebige Erzeugende  $p$  von  $Q_2$  in Punktepaaren einer Involution, und der Ort der Doppelpunkte dieser Involution, wenn die Gerade  $p$  ihre Schar durchläuft, ist eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Spezies. Aus den bewiesenen Sätzen folgt auch: Gegeben seien 6 Geraden  $g_1$  der Ebene;  $k_i$  seien die 6 Kegelschnitte, die je 5 derselben berühren. Dann bilden auf jeder Geraden  $g_i$  die Schnittpunkte mit den anderen Geraden und die Berührungspunkte mit den  $k_j$  ( $j \neq i$ ) Paare einer Involution. Dieser Satz besitzt wieder bemerkenswerte metrische Spezialisierungen.

W. Burau.

**Morgantini, Edmondo:** Su una relazione di armonia fra i triangoli del piano proiettivo complesso. Ann. Triestini, Sez. II 21, 5—33 (1952).

**Cuesta, N.:** Die involutorische komplexe Korrelation. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 330—339 (1952) [Spanisch].

Jede Korrelation des komplexen projektiven Raumes ist in der Form  $u'^* = q \cdot (a_{ik}) \cdot (x \varphi)^*$  darstellbar ( $q$  eine Konstante,  $(a_{ik})$  eine Matrix,  $x$  ein Vektor mit komplexen Koordinaten,  $\varphi$  ein Automorphismus des Körpers der komplexen Zahlen, \* Bezeichnung der transponierten Matrix). Es wird untersucht, welche Bedingungen die hier auftretenden Größen erfüllen müssen, damit die Korrelation involutorisch, polar oder fokal ist. H. Gericke.

## **Algebraische Geometrie:**

**Nollet, Louis:** Définition des variétés algébriques. Bull. Soc. math. Belgique 1951, 72—85 (1952).

L'A. fait un examen critique des différentes acceptions du terme „variété algé-

brique" selon l'Ecole italienne, Van der Waerden, Zariski, Weil et Gröbner. Il traite aussi rapidement des transformations birationnelles, des systèmes algébriques des multiplicités d'intersection et des relations d'équivalence utilisées en Géométrie algébrique. Il appelle l'attention sur quelques fausses synonymies où il est traité de choses essentiellement différentes nonobstant l'emploi d'un même vocabulaire. *L. Godeaux.*

**Severi, Francesco:** *Complementi bibliografici di „Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche. II“.* Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 1—3 (1952).

Besprechung in dies. Zbl. 45, 107.

**Segre, Beniamino:** *Dilatazioni e comportamenti associati nel campo analitico.* Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 373—379 (1952).

Die Begriffe „Dilatation“ und „assoziiertes Verhalten“ wurden in einer früheren Arbeit eingeführt (vgl. dies. Zbl. 46, 389), und zwar sind Dilatationen gewisse birationale Transformationen von algebraischen Mannigfaltigkeiten, die zur Auflösung von Singularitäten angewendet werden und im wesentlichen identisch sind mit den „monoidal transformations“ von O. Zariski [Trans. Amer. math. Soc. 53, 490—542 (1943)], den „transformations élémentaires“ von L. Derwidié (vgl. dies. Zbl. 44, 163; 45, 420) und dem in einer Arbeit des Ref. [Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 319—327; 589—590 (1956)] untersuchten Typ von birationalen Transformationen. Verf. führt hier die Untersuchung lokal, d. h. differentialgeometrisch für beliebige analytische Mannigfaltigkeiten, und zeigt, daß das assoziierte Verhalten gegenüber Dilatationen invariant ist. (Vgl. hierzu auch die späteren Arbeit desselben Verf., s. dies. Zbl. 56, 398, und O. Zariski, Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces, Tokyo 1958.) *W. Gröbner.*

**Abellanas, Pedro:** *Orientation of algebraic varieties.* Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 79—93, engl. Zusammenfassg. 94—101 (1952) [Spanisch].

In questo elegante lavoro l'A. dà una definizione astratta dell'orientazione di una varietà algebrica sopra un corpo ordinabile o sopra un suo ampliamento algebrico finito normale. — Il concetto fondamentale è il seguente: Sia  $V$  una varietà algebrica irriducibile di dimensione  $r$ , nello spazio affine  $E_n$ , sopra un corpo ordinabile  $k$ ; essa possieda punti razionali, cioè aventi coordinate in  $k$ . Mediante l'uso di parametri uniformizzanti la  $V$  in un punto razionale  $A$  semplice per  $V$ , l'A. definisce un'indicatrice di  $V$  in  $A$ ; tra indicatrici in punti diversi egli definisce quindi algebricamente una relazione esprimibile mediante la frase „due indicatrici appartengono alla medesima classe“ e dimostra l'intrinsecità di tale relazione e il fatto che essa gode delle proprietà caratteristiche dell'uguaglianza. Restano così determinate le classi di indicatrici rispetto alla suddetta relazione; ciascuna di queste classi è per definizione un'orientazione di  $V$ . Dalle dimostrazioni segue immediatamente che le orientazioni di  $V$  sono in numero di due. — Si passa quindi alle orientazioni delle varietà subordinate a  $V$  e delle loro intersezioni. — Nella seconda parte del lavoro si considera un corpo  $k^* = k(w)$ , essendo  $k$  un corpo ordinato e  $k^*$  un ampliamento algebrico finito e normale di esso; la  $V$  sia definita e irriducibile su  $k^*$  e possieda punti semplici in quest'ultimo. Mediante la sostituzione  $x_i = x_i^0 + x_i^1 w + \dots + x_i^q w^q$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $q = [k^*:k]$ ) si passa dalle  $n$  indeterminate  $x_i$  alle  $n(q+1)$  indeterminate  $x_i^j$  ( $j = 0, \dots, q$ ); tale passaggio, che è evidentemente l'analogo di quanto si ottiene scindendo il reale dall'immaginario nelle coordinate complesse, permette all'A. di continuare nell'analisi, si da definire la varietà  $V$  di  $E_{n(q+1)}$ ; analoga della riemanniana, e, su questa, le orientazioni nel senso della prima parte del lavoro; queste permettono di definire orientazioni su  $V$  e di tali orientazioni ne esiste una sola ovvero due a seconda che le norme di tutti gli elementi di  $k^*$  abbiano o no lo stesso segno. Ne seguono alcuni corollari, tra i quali particolarmente interessante il seguente: se la norma di ogni elemento di  $k^*$  è positiva, il numero algebrico dei punti di intersezione di due varietà subordinate a  $V$ , di dimensioni complementari, è uguale al loro numero aritmetico. — Facciamo osservare al lettore che negli enunciati dei teoremi sono spesso sottintese talune ipotesi, che invece sono esplicitamente indicate nella dimostrazione o nelle definizioni; p. es. nel corollario di cui sopra le due sottovarietà sono supposte semplici ed aventi solo intersezioni semplici. Di seguito al lavoro in lingua spagnola trovasi la traduzione in lingua inglese, nella quale sono omesse solo le dimostrazioni. *M. Benedicty.*

**Gröbner, W.:** *La théorie des idéaux et la géométrie algébrique.* Centre Belge Rech. math., 2<sup>ième</sup> Colloque Géom. algébrique, Liège, du 9 au 12 juin 1952, 129—141 (1952).

The author treats the following geometric notions from the ideal theoretical point of view: sums and intersections of algebraic varieties, projections, multiplicity of intersections, birational

transformations, adjoint varieties and linear systems. This is an expository article and we can find no theorem which is proved in this paper. Furthermore, there are some statements which are not clear; for example, the author defines another notion of intersection multiplicity, i. e., if cycles  $C$  and  $C'$  are defined by ideals  $\mathfrak{a}$  and  $\mathfrak{b}$  (coefficients are defined by the length of primary components), then the intersection cycle of  $C$  and  $C'$  is the cycle which is defined by the intersection of isolated components of the ideal  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ , and he says that this definition has much advantage because this definition can be applied to every case. The reviewer feels difficulty to agree, because under this definition, we cannot expect the validity of associativity except very special cases. On the other hand, the author says in p. 139 that the conductor  $\mathfrak{f}$  of a coordinate ring  $\mathfrak{o}$  is purely of rank 1, but this is not true in general.

Y. Akizuki.

**Gröbner, W.: Über das arithmetische Geschlecht einer algebraischen Mannigfaltigkeit.** Arch. der Math. 3, 351—359 (1952).

Let  $\mathfrak{A}$  be a homogeneous ideal in the polynomial ring  $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , then the virtual arithmetic genus of an algebraic manifold  $AM(\mathfrak{A})$  defined by  $\mathfrak{A}$  can be defined by the Hilbert's characteristic function for  $H$ -ideal  $\mathfrak{A}$  as usual. The author proves by the direct calculation of the Hilbert's functions, the invariance of the virtual arithmetic genus of  $AM(\mathfrak{A})$  under some kind of regular birational transformations. The final results are as follows: „The virtual arithmetic genus of an (arbitrary, even mixed)  $AM(\mathfrak{A})$  is invariant by the birational transformation which is represented as the product of the Veronese transformations and the regular projections. Exceptional case is the projection from the isolated point of  $AM(\mathfrak{A})$ . In this case the virtual genus is decreased by 1“. — The question whether any biregular transformation can be decomposed in the way mentioned above or not remains yet open. — It is known that the behaviour of the singularity of  $AM(\mathfrak{A})$  has a close connection with the virtual arithmetic genus of  $AM(\mathfrak{A})$ , but it is shown by the examples that the two birationally equivalent models have the same arithmetic genus even though the behaviour of the singularities of these models are quite different.

Y. Akizuki.

**Kodaira, Kunihiko: Arithmetic genera of algebraic varieties.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 527—533 (1952).

Über diesen ersten Beweis der Severischen Vermutung, daß das durch Postulationsformeln definierte arithmetische Geschlecht gleich der alternierenden Summe der Anzahlen der linear unabhängigen Differentiale 1. Gattung ist, berichtet Baldassarri in seinem Buch Algebraic Varieties, Berlin 1956, Kp. X, 8. E. Kähler.

**Hodge, W. V. D.: Tangent sphere-bundles and canonical models of algebraic varieties.** J. London math. Soc. 27, 152—159 (1952).

Das Tangentensphärenbündel einer  $m$ -dimensionalen Hermiteschen Mannigfaltigkeit  $M$ , also insbesondere einer singularitätenfreien  $m$ -dimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit, kann mit Hilfe von Pfaffschen Formen  $\omega^i$  ( $i = 1, \dots, m + s$ ;  $s \geq m$ ) vom Typus  $(1, 0)$ , unter welchen in jedem Punkte  $P$  von  $M$  sich  $m$  linear unabhängige finden, in die Graßmannsche Mannigfaltigkeit  $G_{m,s}$  dadurch abgebildet werden, daß dem Punkte  $P$  der Punkt von  $G_{m,s}$  zugeordnet wird, dessen homogene Koordinaten den Produkten  $\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_m}$  ( $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ ) proportional sind. Der Schnitt dieses Bildes  $f^*(M)$  mit einer Basis-Schubert-Mannigfaltigkeit  $Z^r$  ist dann bei hinreichend allgemeiner Wahl der  $\omega^i$  Bild des durch  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^{m-r+1} = 0$  bestimmten  $(2m - 2r)$ -Zyklus  $\Gamma_{2m-2r}$ . Die Homologieklassse von  $f^*(M)$  kann mittels des Schubertkalküls explizit als Linearkombination der Schubert-Mannigfaltigkeiten angegeben werden. Im Falle einer algebraischen Mannigfaltigkeit  $M$  werden die Zyklen  $\Gamma_{2r}$  durch die  $r$ -dimensionalen kanonischen Mannigfaltigkeiten von  $M$  dargestellt. Wenn auf  $M$  Picard-Differentiale 1. Gattung als  $\omega^i$  genommen werden können, ist die Abbildung  $f^*$  von  $M$  rational, unter Umständen sogar birational. Im letzteren Falle ist  $f^*(M)$  ein sogenanntes Graßmannsches kanonisches Modell von  $M$ , das nicht nur für  $r = 1$ , wie das klassische kanonische Modell, sondern für alle Dimensionen  $m - r$  die kanonischen Mannigfaltigkeiten von  $M$  durch Schnittbildung  $z_r \cdot f^*(M)$  ergibt. Verf. gibt noch Beispiele für die Konstruktion des Graßmannschen kanonischen Modells.

E. Kähler.

**\*Igusa, Jun-ichi: Normal point and tangent cone of an algebraic variety.** Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 27, 189—201 (1952).



Igusa, Jun-ichi: On the Picard varieties attached to algebraic varieties. Amer. J. Math. 74, 1—22 (1952).

Im Zusammenwirken von abstrakt algebraischen und topologischen Methoden wird hier der Unterschied der beiden Picardschen Mannigfaltigkeiten einer algebraischen Mannigfaltigkeit  $V$  im Falle der Charakteristik 0 genau ausgearbeitet. Die  $(q, 2q)$ -Periodenmatrix  $\omega$  der  $q$  Picardschen Differentiale 1. Gattung  $\Phi_i$  von  $V$  bestimmt die Albanese-Mannigfaltigkeit von  $V$  als eine  $q$ -dimensionale Abelsche Mannigfaltigkeit. Die als Schnitt von  $V$  mit einem allgemeinen linearen Raum entstehende Kurve  $C(M)$  gibt Anlaß zur Lösung eines Umkehrproblems  $\sum_{i=1}^q \int \Phi_i \equiv u_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ), welches auf  $C(M)$   $\varepsilon$  von  $u$  eindeutig abhängende Punktgruppen  $P_1, \dots, P_q$  bestimmt. Dabei ist  $\varepsilon = \sqrt{|E(M)|}$  aus der Hermiteschen Matrix  $\left( \int_{C(M)} \Phi_i \wedge \bar{\Phi}_j \right) = \omega E(M)'_{\omega}$  gewonnen. Einer Idee von Poincaré folgend, gewinnt Verf. so eine Divisorenschar  $X(u)$  auf  $V$ . Jeder Divisor  $Y$  auf  $V$ , der als Zyklus ganzzahlig homolog 0 ist, bestimmt eindeutig ein Picardsches Differential 3. Gattung  $\psi$  mit nur rein imaginären Perioden und durch Bildung von  $\exp \int \psi = X_u(\vartheta)$  einen Charakter der 1-dimensionalen Bettischen Gruppe von  $V$ . Da genau dann, wenn  $X_u(\vartheta)$  Hauptcharakter ist,  $Y$  Divisor einer Funktion wird, gibt die Berechnung der Perioden von  $\int \psi'$  Einblick in die Gruppe  $G_c(V)/G_l(V)$  der ganzzahlig der 0 homologen Divisorenklassen auf  $V$ . Diese Berechnung gelingt im Falle der Divisorenklassen vom Typus  $X(z) - X(z')$ , und es zeigt sich, daß jedes Element von  $G_c(V)/G_l(V)$  von einem solchen Divisor vertreten wird und der zugehörige Charakter nur von  $z - z' \bmod \varepsilon^{-1} E(M)'_{\omega}$  abhängt. Die ganzzahlig der 0 homologen Divisorenklassen bilden darum eine Abelsche Mannigfaltigkeit, die sogenannte Picardsche Mannigfaltigkeit von  $V$ , die von der Albanese-Mannigfaltigkeit von  $V$   $\varepsilon^{2q-2}$ -fach unverzweigt überlagert wird. Verf. beweist auch die birationale Invarianz bei den Abelschen Mannigfaltigkeiten und der Gruppe der rational der 0 homologen Divisorenklassen. — Für eine Vereinfachung durch bessere Interpretation der Matrix  $E(M)$  und für weitere Kennzeichnung der beiden Picard-Mannigfaltigkeiten vgl. dies. Zbl. 54, 64.

E. Kähler.

Rosati, Mario: Osservazioni su alcuni gruppi finiti di omografie appartenenti ad una varietà di Picard e ad una varietà abeliana di rango due. Rend. Mat. e Appl. 11, 453—469 (1952).

Es bedeute  $\Omega = (\pi i A^{-1}, A)$  eine Riemannsche Matrix in der Krazerschen Normalform,  $\Theta_n(u)$  eine zugehörige Thetafunktion der Ordnung  $n = l \delta_p$ ,  $A = \text{Diag}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p\}$ ,  $W_p$  die zugehörige Picardsche Mannigfaltigkeit (Bezeichnungen nach Conforto, dies. Zbl. 28, 153 und: Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Berlin 1956). Der Gleichung  $\Theta_n(u + c) = 0$  entspricht auf  $W_p$  eine Hyperfläche  $A$ , die in einer linearen Schar  $|A|$  der Dimension  $\delta = n^p/|A|$  variiert, falls  $\Theta_n(u)$  alle gleichändigen Thetas durchläuft, bzw. ein irreduzibles algebraisches System beschreibt, wenn  $c$  in dem von  $\Omega' = \Omega A^{-1}$  aufgespannten Periodenparallelotop variiert (Andreotti, dies. Zbl. 49, 111). Verf. bestimmt die Gruppe der Transformationen  $u^* = \pm u + c$ , welche jedes lineare System  $|A|$  in sich transformieren: sie ist abelsch, hat die Ordnung  $2\delta^2$  und leicht angebbare Erzeugende. Auf einem normalen Modell  $W_p$ , dem projektiven Bild einer Schar  $|A|$  in einem  $S_{\delta-1}$ , ergibt das eine abelsche Gruppe von Homographien des  $S_{\delta-1}$ , welche die  $W_p$  in sich transformieren. Diese Homographien werden auch explizit angegeben. — Im zweiten Teil untersucht Verf. abelsche Mannigfaltigkeiten des Ranges 2; eine solche Mannigfaltigkeit  $V_p$  steht in (2,1)-Korrespondenz zur  $W_p$ , z. B. als Bild der Involution  $u^* = -u \pmod{\Omega}$ .  $V_p$  wird durch die involutorischen Transformationen  $u^* = u + \sigma$ ,

wo  $\sigma$  eine Halbperiode bedeutet, in sich transformiert; deren gibt es  $2^{2p}$ , die eine abelsche Gruppe bilden. Es sollen nun diejenigen unter ihnen bestimmt werden, welche eine lineare Schar  $|L'|$ , die geraden  $\Theta_n(u)$ , bzw. eine Schar  $|L''|$ , die ungeraden  $\Theta_n(u)$  entspricht, invariant lassen. Diese Bestimmung wird mit Benützung früherer Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 48, 147) im einzelnen ausgeführt und so das endgültige Ergebnis erreicht: Jedes normale Modell einer Abelschen Mannigfaltigkeit  $V_p$  des Ranges 2, das durch  $\delta'$  gerade (bzw.  $\delta''$  ungerade) linear unabhängige Thetafunktionen  $\Theta_n(u)$  einer Schar  $|L'|$  ( $|L''|$ ) in einem projektiven Raum  $S_{\delta'-1}$  ( $S_{\delta''-1}$ ) parametrisch dargestellt ist, hat die Ordnung  $p! \delta/2$  und wird durch  $2^m$  involutorische Homographien des Einbettungsraums in sich transformiert. Die Zahl  $m \leq 2p$  wird genau angegeben.

W. Gröbner.

**Chow, Wei-Liang: On the quotient variety of an abelian variety.** Proc. nat. Acad. Sci. USA. 38, 1039—1044 (1952).

Let  $A$  and  $B$  be two abelian varieties and let  $F$  be a homomorphism of  $A$  onto  $B$ . Then the kernel of  $F$  is an algebraic subgroup of  $A$ . The author proposes the inverse question: Let  $X$  be an algebraic subgroup of  $A$ . Then do there exist always an abelian variety  $A(X)$  and a homomorphism  $F$  of  $A$  onto  $A(X)$  such that the kernel of  $F$  is exactly  $X$ ? Theorem 1 is an affirmative answer to this. Moreover, if  $K$  is a field of definition for  $A$  and if  $X$  is normally algebraic and separable over  $K$ , then  $A(X)$  and  $F$  can be defined over  $K$  and  $F$  is separable over  $K$ . ( $X$  is said to be separable over  $K$  if every component is algebraic with the order of inseparability 1 over  $K$ .)  $A(X)$  and  $F$  have a kind of universal mapping property. The proof is based on the considerations of the Chow points of the positive cycles  $T_x(X)$ , where  $T_x$  denotes the translation by  $x$ , and the results obtained in his preceding paper (Algebraic system of positive cycles, see this Zbl. 36, 373). The author proceeds further: Let  $K$  be any field of definition for  $A$  over which  $X$  is normally algebraic (but not necessarily separable). Then there exists an abelian variety  $A(X, K)$  defined over  $K$  (which is called a relative quotient variety) having similar properties as  $A(X)$ , though  $F$  is not separable and the universal mapping property must be somewhat restricted. (Throughout this paper  $A$  is assumed to be a projective variety. But it is not restrictive since it was proved later that any abelian variety can be embedded in a projective space (Matsusaka, this Zbl. 57, 369).

Y. Akizuki.

**Nakano, Shigeo: Note on group varieties.** Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 27, 55—66 (1952).

The author first makes a simple but very useful remark on homomorphisms of group varieties (Th. 1). Namely: Let  $G$  and  $H$  be group varieties and let  $f$  be a rational mapping from  $G$  into  $H$  such that  $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$  for independent generic points  $x, y$  of  $G$ . Then  $f$  is defined everywhere and is a homomorphism. If  $f(x)$  is generic on  $H$  for a generic point  $x$  of  $G$ , then  $f$  is onto. — The rest of this paper is devoted to the construction of homogeneous spaces. Let  $G$  be a group variety and  $H$  be its group subvariety. Let  $k$  be a common field of definition. Then there exist a non-singular (abstract) variety  $V$  and a rational mapping  $\varphi$  of  $G$  onto  $V$ , both defined over  $\bar{k}$ , with the following properties:  $G$  operates on  $V$  transitively from the left.  $\varphi$  is everywhere defined and we have  $\varphi(sx) = s\varphi(x)$ .  $\varphi^{-1}(M)$  is a left coset of  $G$  by  $H$  for each point  $M$  of  $V$ . If  $H$  is a normal subgroup, then  $V$  is a group variety and  $\varphi$  is a homomorphism with kernel  $H$ . The extension of the whole results to the case where  $H$  is reducible, is immediate. The proof is modelled on Weil's book „Variétés abéliennes“ except that the theory of Chow points and the quasi-compactness of Zariski topology are used. (This paper was one of the first attempts in this direction. Later a decisive result was obtained by A. Weil, who proved that  $V$  and  $\varphi$  can be defined over  $k$ . See this Zbl. 65, 142). — We denote also that this paper contains the following important theorem of algebraic geometry: Let  $V$  be a (projective or affine) variety. Then the Chow point of  $V$  generates over the prime field the smallest field of definition of  $V$ .

Y. Akizuki.

**Igusa, Jun-ichi: On the varieties of the classical groups in the field of arbitrary characteristic.** Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 27, 67—74 (1952).

The author considers classical groups  $SL(n, K)$ ,  $SO(n, K)$  and  $Sp(n, K)$  over a universal domain  $K$  of arbitrary characteristic  $p$  from algebraico-geometric viewpoint. They are shown to be irreducible group varieties defined over the prime field  $P$ . Their function fields over  $P$  are rational. Some examples of homogeneous spaces [e. g. the  $(n-1)$ -sphere  $Q^{n-1}$  with respect to  $SO(n, K)$ ] are given, and the exceptional cases, which can happen only when  $p = 2$ , are determined.

Y. Akizuki.

**Morgantini, Edmondo: Sulla rappresentazione parametrica di un'ampia classe di varietà unirazionali e sulle sue applicazioni all'analisi diofantea.** Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 11, 238—267 (1952).

Verf. betrachtet im affinen komplexen Raum der Dimension  $r + s + t$ , in dem  $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t$  nicht homogene Koordinaten bedeuten, die durch die Gleichung (1)  $\sum_{i=1}^r a_i x_i^{\sigma m_i} = \sum_{j=1}^s b_j y_j^{\sigma n_j}$  ( $r, s, \varrho, \sigma, m_i, n_j \geq 1$ ) dargestellte Hyperfläche  $W$ , wo  $\varrho$  und  $\sigma$  die größten gemeinsamen Teiler der im ersten und zweiten Glied auftretenden Exponenten und  $a_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ),  $b_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) teilerfremde komplexe Polynome in den Variablen  $z_1, \dots, z_t$  sind. Es wird eine hinreichende Bedingung dafür aufgestellt, daß  $W$  unirational sei und daraus eine Parameterdarstellung mittels ganzer rationaler Funktionen abgeleitet. Insbesondere wird die Bedingung gegeben, unter der  $W$  birational ist. Sowohl die Unirationalität als auch die Birationalität der  $W$  bedingen die Existenz eines auf  $W$  liegenden unirationalen Kurvensystems (c) mit Dimension  $r + s + t - 2$  und Index  $\geq 1$ , dessen allgemeine Kurve rational, irreduzibel und auf eine Gerade ohne Zuziehung von arithmetischen Irrationalitäten beziehbar ist. Nur wenn  $W$  birational ist, ist (c) vom Index 1 und birational einem linearen Raum äquivalent. Aus diesen geometrischen Untersuchungen über  $W$  leitet Verf. ferner interessante Anwendungen auf die diophantische Analyse ab. So wird u. a. unter Voraussetzung, daß die Polynome  $a_i, b_j$  rationale Koeffizienten besitzen, eine Parameterdarstellung der rationalen Lösungen der diophantischen Gleichung (1) und besonderer Systeme von diophantischen Gleichungen gegeben.

R. Permutti.

**\*Marchionna, Ermanno:** Varietà intersezioni complete e varietà di diramazione. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 82—102 (1952).

**\*Marchionna, Ermanno:** Curve e varietà di diramazione per superficie ed ipersuperficie multiple generali. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 473—483 (1952).

**Roth, Leonard:** Sulle  $V_3$  algebriche generate da congruenze di curve. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 66—70 (1952).

L'A. considère une variété algébrique à trois dimensions contenant une congruence de courbes rationnelles ou elliptiques, telle que par un point passe une seule courbe de la congruence. Il donne dans certains cas des conditions d'unirationnalité de la variété (variété représentable paramétriquement par des fonctions rationnelles sans qu'elle soit elle-même rationnelle). Il utilise dans ce but les résultats obtenus par F. Enriques [Math. Ann. 49, 1—23 (1897)] et les complète sur certains points.

L. Godeaux.

**Roth, Leonard:** Sulle  $V_3$  algebriche che contengono un sistema lineare di superficie di genere lineare  $p^{(1)} \leq 1$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 401—405 (1952).

L'A. considère une variété algébrique à trois dimensions contenant un système linéaire de surfaces réglées irrrationnelles ou de surfaces de genre linéaire 1 (surfaces dont tous les genres sont égaux à 1, ou surfaces de Picard, ou surfaces contenant un faisceau de courbes elliptiques). Il en conclut des conditions d'irrationalité de la variété dans certains cas.

L. Godeaux.

**Orgeval, B. d':** Sur la classification des surfaces algébriques de genre géométrique  $p_g = 1$ . Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 3—22 (1949).

Exposé systématique de la classification des surfaces algébriques irrégulières de genre géométrique  $p_g = 1$ , par les procédés algébrique-géométriques. Recherches d'Enriques et développement de celles-ci.

L. Godeaux.

**Orgeval, Bernard d':** Sur la classification des surfaces algébriques de genre géométrique  $p_g = 1$ . Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 167—195 (1949).

L'A. détermine les surfaces algébriques régulières ayant une courbe canonique isolée ( $p_g = 1$ ) d'ordre supérieur à zéro, en utilisant les méthodes classiques d'Enriques.

L. Godeaux.

**Benedicty, Mario:** Sopra le trasformazioni birazionali in sé di un campo neutro a sostegno ellittico o iperellittico. Rend. Mat. e Appl. 11, 411—433 (1952).

L'A. étudie les transformations birationnelles en soi d'un champ neutre  $\gamma_p$  déterminé sur une courbe algébrique  $C$  de genre  $p$  sur laquelle on a fixé  $\delta_1$  couples neutres de points distincts et  $\delta_2$  couples neutres de points confondus et par conséquent de genre virtuel  $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ . En se basant sur son extension du théorème de Schwarz-Klein à ces champs (ce Zbl. 50, 371), il détermine les groupes de transformations birationnelles de  $\gamma_p$  en soi dans les cas où  $C$  est elliptique



ou hyperelliptique. Il étudie le nombre des transformations génératrices de ces groupes et fixe une limite supérieure pour les périodes de ces transformations. *L. Godeaux.*

**Campedelli, Luigi:** *Sulle singolarità delle curve algebriche.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 234—238 (1952).

Un des procédés classiques pour établir que le nombre des points multiples d'une courbe algébrique infiniment voisins d'un point singulier est fini est basé sur le passage en ces points des polaires. B. Segre (ce Zbl. 46, 389) a objecté que les multiplicités de passage des polaires pouvaient être différentes de celles qu'impose la polarité. L'A. cherche à conserver la démonstration classique. Pour cela il établit que si en un point la multiplicité réelle est inférieure à la virtuelle, le nombre des points multiples infiniment voisins appartenant à des voisinages successifs, ce qui n'est d'ailleurs pas limitatif, est fini. Il établit également qu'une courbe dotée virtuellement d'une infinité de points multiples ne peut présenter la multiplicité effective nulle en aucun de ses points; ceci équivaut à dire que l'hypothèse d'infinités de points multiples est incompatible avec le fait que certains aient une multiplicité effective inférieure à la virtuelle. Extension au cas des surfaces. *B. d'Orgeval.*

**Fusa, Carmelo:** *Sulla disuguaglianza di Noether.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 135—136 (1952).

Extension, aux cas de systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre quelconque, de l'inégalité de Noether concernant les systèmes de courbes rationnelles. *G. Ancochea.*

### Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● **Andelić (Angelitch), T. P.:** *Tensorrechnung.* Belgrad: Naučna Kniga 1952. VIII, 319 S [Serbisch].

Le livre contient quatre parties: Introduction, Algèbre des tenseurs, Analyse des tenseurs et Applications à la Mécanique. Le livre est conçu, tout d'abord, par l'A. à titre d'un livre d'étude; par conséquent on y trouve tout ce qui est destiné pour faire comprendre le sujet d'étude. Deux tendances se manifestent clairement: d'abord, l'A. ne suppose chez le lecteur aucune connaissance spéciale préalable, en discutant détaillément tout à partir des théories de transformation jusqu'aux applications dans le domaine de Mécanique. D'autre part, le livre est écrit de telle manière, qu'il soit accessible même, aux débutants. C'est pour cela que l'exposé du sujet est devenu assez étendu. L'A. avait réussi de donner à son Traité un caractère personnel, introduisant certains problèmes qu'il expose d'une nouvelle manière, ou qu'il traite pour la première fois. C'est ainsi que, dans la III-ième partie, est donnée la généralisation de la notion du vecteur de Darboux, dans l'espace de Riemann, et de cette manière est introduite la notion du tenseur de Darboux. D'autre part, faut il citer, comme innovation, l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des systèmes de points matériels, l'introduction d'une méthode spéciale de déduction des tenseurs de transformation et de tenseurs généraux de compatibilité de Beltrami-Michell. *N. Saltykov.*

**Libois, Paul:** *Contenu projectif des notions de nombre et de tenseur.* C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 673—678, ungar. und russ. Zusammenfassg. 678 (1952).

In einleitenden historischen Betrachtungen hebt Verf. als besonders bemerkenswert hervor, daß man seit den Schöpfungen der griechischen Geometer viele Sätze projektiver Natur kannte, ohne deren projektiven Charakter erkannt zu haben, und daß erst von Staudt eine selbständige Begründung der projektiven Geometrie gegeben habe. — In der gleichen Situation befinde sich nach dem Urteil des Verf. die vor etwa hundert Jahren entstandene „projektive Algebra“, jedoch mit dem Unterschied, daß deren systematischer und selbständiger Aufbau noch ausstehe. — Einen Schritt auf dieses Ziel hin hat Verf. bereits im Jahre 1945 unternommen. In der

vorliegenden Note wird kurz geschildert, was unter dem projektiven Inhalt des Zahl- und Tensorbegriffs zu verstehen ist.

H. Karzel.

**Gheorghiu, Octavian Em.:** Ein pseudolineares geometrisches Objekt der Klasse I mit 2 Komponenten. Commun. Acad. Republ. popul. Române 2, 1—4 (1952) [Rumänisch].

Verf. sucht die differentialgeometrischen Objekte  $(z_1, z_2)$  erster Klasse mit zwei Komponenten, deren Transformationsformeln von der Gestalt  $\bar{z}_1 = z_1 + f_1(A)$ ,  $\bar{z}_2 = z_2 + e^{z_1} (e^{f_1(A)} - 1) f_2(A)/f_1(A)$  sind ( $A$  steht für die Derivierten der neuen Koordinaten bezüglich der alten, ist also im eindimensionalen Falle eine Zahlenveränderliche, im  $n$ -dimensionalen Falle aber eine Matrix der Ordnung  $n$ ).  $f_1$  wird stillschweigend als meßbar bzw. analytisch vorausgesetzt, während über  $f_2$  keine Einschränkungen getroffen werden, und so findet Verf.  $\bar{z}_1 = z_1 + k \log |A|$ ,  $\bar{z}_2 = z_2 + h (|A|^k - 1) e^{z_1}$  [in den zweiten Formeln von (8) S. 2, bzw. von (14) S. 3 der Arbeit steht fehlerhaft  $\varphi'^k(\xi_1)$  bzw.  $\Delta^k$  statt  $|\varphi'(\xi_1)|^k$  bzw.  $|\Delta|^k$ ]. Bezüglich der Lösung der Funktionalgleichung  $f(AB) = f(A)f(B)$  ( $A, B$  Matrizen) in der Zeile 7 von S. 3 vgl. u. a. O. Perron (dies. Zbl. 26, 405), S. Golab [Colloquium math. 4, 265 (1957)].

J. Aczél.

**Ortiz Fornaguera, R.:** Über das Transformationsverhalten der Größen im kano-nischen Formalismus. Revista Acad. Ci. Madrid 46, 137—156 (1952) [Spanisch].

L'A. analyse en grand détail la double variance des grandeurs intervenant dans un formalisme canonique classique. Sur une variété différentiable  $V_{n+1}$ , il considère un champ  $\psi^*(x)$  décrit par un tenseur de type  $R(G)$ , où  $R(G)$  est une représentation linéaire du groupe  $G$  linéaire à  $n + 1$  variables réelles. Les équations du champ sont supposées dériver d'un principe variationnel défini par l'intégrale  $W = \int_D L(x^k, \psi^*, \psi^*_{,k}) dx$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) où  $L$  est une densité scalaire,  $D$  un domaine de  $V_{n+1}$  dont le bord est une hypersurface  $\sigma$ . Cette hypersurface peut être paramétrisée à l'aide de coordonnées  $u^r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) et la variance des différentes quantités est étudiée soigneusement soit pour les changements de coordonnées locales dans  $V_{n+1}$  (variance- $x$ ), soit pour les changements de coordonnées locales dans  $\sigma$  (variance- $u$ ). L'A. montre qu'un formalisme canonique complet peut être élaboré à partir de la seule donnée sur  $V_{n+1}$  d'un champ de vecteurs sécant pour  $\sigma$  et il le développe avec des buts analogues à ceux de P. Weiss (ce Zbl. 14, 371).

A. Lichnerowicz.

**Prosenitto, Aristide:** Per una teoria geometrica unitaria degli ingranaggi per assi sghembi. Mem. Acad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 9, 39—47 (1952).

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

**Lalan, V.:** Quelques applications géométriques de la différentiation extérieure. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 108—122 (1949).

Die „äußere Ableitung“ einer Pfaffschen Form nach Frobenius und E. Cartan wird auf die elementare Flächentheorie angewandt. So werden die Gaussischen Krümmungsmaße quadratischer Differentialformen berechnet und spezielle Parameter und einige spezielle Flächen betrachtet.

W. Blaschke.

**Golab, S.:** Sur une condition nécessaire et suffisante d'ombilicité d'un point de surface. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 140—144 (1952).

Ein Punkt  $P$  einer Fläche des euklidischen Raumes ist dann und nur dann Nabelpunkt, falls die Normalkrümmungen zweier durch  $P$  laufender, verschiedener Krümmungstreifen gleich sind. Dies folgt z. B. aus W. Blaschke, Differentialgeometrie I, 4. Aufl. (1945), § 47 in Verbindung mit Kap. 5, (93), (115). Die angegebene Kennzeichnung der Nabelpunkte ist insofern gegenstandslos, als sie die Krümmungslinien benutzt, an deren Nicht-Bestimmtheit man gerade die Nabelpunkte erkennt.

M. Barner.

**Löbell, Frank:** Die Integrabilitätsbedingung für Ortsfunktionen in der natürlichen Flächentheorie. Math. Ann. **124**, 151—157 (1952).

$F$  sei eine skalare, vektorielle oder tensorielle Ortsfunktion auf einer Fläche. Dann gilt für ein orthogonales Netz

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial F}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial F}{\partial s_2} = G_1 \frac{\partial F}{\partial s_1} + G_2 \frac{\partial F}{\partial s_2},$$

wobei  $s_1, s_2$  die Bogenlängen und  $G_1, G_2$  die geodätischen Krümmungen der Netzlinsen bedeuten. Da  $dF/ds$  eine Linienelementfunktion der Fläche ist, kann man für den zweiten Differentiations-schritt auch die geodätische Ableitung  $\delta/ds$  verwenden, bei der das Linienelement, von dem die Funktion abhängt, beim Fortschreiten in der Differentiationsrichtung parallel verschoben werden soll. Damit geht die Formel (1) über in

$$(2) \quad \frac{\delta}{\partial s_2} \frac{\partial F}{\partial s_1} - \frac{\delta}{\partial s_1} \frac{\partial F}{\partial s_2} = 0$$

(vgl. F. Löbell, dies. Zbl. **37**, 389). In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, daß die einfache Beziehung (2) auch für ein beliebiges schiefwinkliges Netz von Koordinatenlinien gilt. Eine koordinatenunabhängige Herleitung dieser Integrabilitätsbedingung erfolgt mit Hilfe des Differentialoperators

$$\sin \omega \mathfrak{D} = t_2 \frac{\delta}{\partial s_1} - t_1 \frac{\delta}{\partial s_2},$$

wobei die  $t_i$  Einheitsvektoren in den Differentiationsrichtungen und  $\omega \neq 0, \pi$  den von ihnen eingeschlossenen Winkel bedeuten. Man erhält die mit (2) gleichwertige Relation

$$(3) \quad |\mathfrak{n} \mathfrak{D} F| = 0$$

( $\mathfrak{n}$  Normaleneinheitsvektor). Die Anwendung von (3) auf den Ortsvektor der Fläche läßt eine einfache geometrische Deutung zu. K. H. Weise.

**Löbell, Frank:** Variation von Kurvenintegralen über Linienelementfunktionen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1951**, 1—9 (1952).

Verf. leitet für die im Titel genannte Variation eine Formel her unter Verwendung der von ihm eingeführten geodätischen Richtungsableitung (vgl. dies. Zbl. **35**, 374) und wendet diese Formel an auf verschiedene Linienelementfunktionen, die in der Streifentheorie eine Rolle spielen (Normalkrümmung, Normalwindung, geodätischer Krümmungsvektor) bzw. von Verf. in die Theorie der Flächenabbildungen eingeführt worden sind (Riß-, Querriß- und Normalrißmaßstab, vgl. dies. Zbl. **38**, 333 sowie den in diesem Zbl. **30**, 214 angezeigten Bericht). H. Pietsch.

**Löbell, Frank:** Integrabilitätsbedingungen in der Theorie der Flächenabbildungen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1951**, 11—28 (1952).

Für die bei der Flächenabbildung  $\mathfrak{x} \rightarrow \eta$  auftretenden Riß-, Querriß- und Normalrißmaßstäbe (vgl. Verf., dies. Zbl. **38**, 333) der Kurven des (orthogonal angenommenen) Parameternetzes auf  $\mathfrak{x}$  gewinnt Verf. — unter Verwendung zunächst von gewöhnlichen, dann von geodätischen Richtungsableitungen (vgl. Verf., dies. Zbl. **35**, 376) — drei Integrabilitätsbedingungen, in die außerdem die Normalkrümmungen und -windungen (und bei der erstgenannten Fassung dazu noch die geodätischen Krümmungen) der Kurven des  $\mathfrak{x}$ -Netzes eingehen. Im Spezialfall des sphärischen Bildes gehen die ersten beiden Bedingungen in die Codazzi-Mainardischen Gleichungen über, die dritte aber nicht in das Gaußsche theorema egregium, sondern in eine Identität. (Die Frage, durch welche Spezialisierung man das Gaußsche Theorem erhält, soll später behandelt werden.) Die Bedingungen werden weiter umgeformt und auch invariant gefaßt, unter Verwendung von Vektoren, Dyaden und Differentialoperatoren, die z. T. auch sonst schon und insbesondere in den zahlreichen Arbeiten des Verf. über die Theorie der Flächenabbildungen mit Erfolg herangezogen worden sind. H. Pietsch.

**Rembs, Eduard:** Integralformeln der Verbiegungstheorie. Math. Nachr. **7**, 61—64 (1952).

En partant d'une formule intégrale établie par Herglotz (ce Zbl. **28**, 94) pour deux surfaces isométriques, l'A. en déduit les conséquences de divers ordres pour le cas d'une déformation analytique  $\bar{w}(u, v) = w(u, v) + 2tz(u, v) + 2t^2z^{(2)}(u, v) + \dots$ . Les termes du premier ordre ne donnent rien d'intéressant. Les termes du second ordre donnent une formule connue de Blaschke [Einführung in die Differentialgeometrie (ce Zbl. **41**, 288), S. 103—109]. Une autre formule intégrale est déduite des termes du troisième ordre. Pour établir ses résultats, l'A. utilise un de ses travaux antérieurs (ce Zbl. **5**, 24). M. Haimovici.

**Sakellariou, Nilos:** Über Strahlensysteme, deren abwickelbaren Flächen eine Fläche unter geodätischen Linien und ihren geodätischen Parallelen schneiden. Bull. Soc. math. Grèce **26**, 69—73, griechische Zusammenfassung. 73—74 (1952).



Es werden die Bedingungen dafür aufgestellt, daß die abwickelbaren Flächen eines Strahlsystems eine Fläche in geodätischen Linien und deren Orthogonaltrajektorien schneiden. Bedeutet  $2r$  den Abstand der Brennpunkte eines Strahls, so ergibt sich im wesentlichen eine Differentialgleichung für  $r$ . In Sonderfällen wird eine Integration angedeutet.

H. R. Müller.

**Phlorass, Milt.:** Über die Guichardschen Systeme. Bull. Soc. math. Grèce 26, 29—68 (1952) [Griechisch].

Verf. baut auf der Darstellung der Strahlensysteme (oder: Geradenkongruenzen) im euklidischen  $R_3$  auf, wie sie Kommerell in seinem Buch: Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, II (dies. Zbl. 3, 218) gibt. Mit Hilfe des hier entwickelten Formelapparates wird als Hauptergebnis bewiesen: Die beiden Brennflächen eines Guichardschen Systems (das ist ein Geradensystem, bei dem die Torsen des Systems die Brennflächen in ihren Krümmungslinien berühren) sind dann und nur dann  $W$ -Flächen, wenn das Verhältnis der Oberflächenelemente der beiden Brennflächen bei der durch das Geradensystem vermittelten natürlichen Zuordnung der beiden Brennflächen eine Konstante ist.

W. Klingenberg.

### Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

**Vesentini, Edoardo:** Sulle omografie definite da certe coppie di elementi differenziali tangenti. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. 3, Nr. 2, 26—28 (1952).

**Salini, Ugo:** Calotte superficiali del terzo ordine inflessionali con lo stesso centro e lo stesso piano tangente. Rend. Mat. e Appl. 11, 434—452 (1952).

Seguendo l'indirizzo già tracciato in precedenti lavori di Bompiani (questo Zbl. 26, 83) sulle calotte del 2° ordine, l'A. considera le calotte (inflessionali) di equazione:

$$a_0 z = a_{111} x^3 + 3a_{112} x^2 y + 3a_{122} x y^2 + a_{222} y^3 + [4]$$

e le rappresenta coi punti  $(a_{111}, a_{112}, a_{122}, a_{222}, a_0)$  di uno spazio  $R_4$ : le calotte irregolari corrispondono ai punti dell'iperpiano  $a_0 = 0$ , quelle con due tangenti asintotiche coincidenti (calotte semiparaboliche) ai punti di un cono  $\Sigma_3^4$  e quelle con le tre tangenti asintotiche coincidenti (calotte paraboliche) ai punti di un cono  $W_3^2$  il cui vertice rappresenta la calotta iperinflessionale ( $a_{112} = 0$ ); allo studio delle trasformazioni proiettive che in  $R_4$  mutano in sè l'assoluto formato da tali enti geometrici corrisponde la geometria proiettiva delle calotte in esame. L'A. considera poi sistemi lineari di calotte: fasci, reti e sistemi  $\infty^3$ , rappresentati in  $R_4$  rispettivamente da rette, piani, iperpiani, distinguendo numerosi casi a seconda della loro posizione rispetto all'assoluto e determinando gli invarianti legati ad un fascio.

P. Buzano.

**Mihailescu, T.:** Sur les directrices Wilczynski et les surfaces minimum projectives. Acad. Republ. popul. Române. Studii Cerc. mat. 1, 374—388, russ. und französ. Zusammenfassg. 389—390, 391—392 (1952) [Rumänisch].

Soient  $A, A'$  les deux congruences de Wilczynski d'une surface  $S$ . Il existe des surfaces  $S'$  — dépendant de 5 fonctions arbitraires d'un argument — telles que l'une de ces congruences soit stratifiable, l'autre étant la stratifiante. L'A. étudie quelques propriétés de ces surfaces. Si la stratifiabilité a lieu en un sens,  $S$  est isothermo-asymptotique. Si elle a lieu en l'autre sens,  $S$  est une surface possédant une forme asymptotique de courbure constante, égale à  $-2$ . Dans ce dernier cas, les foyers de la congruence formée par les premières directrices sont conjuguées par rapport à la quadrique de Lie. Si les deux congruences de Wilczynski forment un couple stratifiable, les asymptotiques de  $S$  appartiennent à des complexes linéaires. Dans ce cas, les directrices de Wilczynski sont conjuguées par rapport à une quadrique fixe, dont on étudie encore d'autres propriétés. Dans le dernier paragraphe, on établit, en partant d'un théorème de Buchin-Su (ce Zbl. 11, 324), l'existence des surfaces minima-projectives, et le fait qu'elles dépendent de 6 fonctions arbitraires d'un argument.

M. Haimovici.

\***Kovancov, N. I.:** Über eine Flächenklasse in der projektiven Differentialgeometrie. Ukrain. mat. Žurn. 4, 137—154 (1952) [Russisch].

**Sul'man, T. A.:** Asymptotische Transformationen dreifach konjugierter Flächensysteme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 501—504 (1952) [Russisch].

● **Graser, Wolfram:** Konforme Differentialgeometrie einparametriger Kugelscharen. (Dissertation.) Würzburg 1952. II, 82 S.

Schließt man den euklidischen dreidimensionalen Raum durch den uneigentlichen Punkt zum Möbius-Raum ab, so kann man die Kugeln einschließlich der Ebenen) des erweiterten

euklidischen Raumes umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines projektiven vierdimensionalen Raumes  $R_4$  abbilden. Den Punkten des euklidischen Raumes entsprechen die Punkte einer nicht-entarteten Fläche zweiter Ordnung des  $R_4$ . Einer Kugelschar ist eine Kurve des Bildraumes zugeordnet, deren Punkte nicht auf der ausgezeichneten Quadrik liegen. — Verf. klassifiziert die einparametrischen Kugelscharen an Hand der Bildkurve, wobei auf die Lage des Kurvenelements und der zugehörigen Schmieggräume bezüglich der festen Quadrik zu achten ist. Es ergeben sich zahlreiche Fallunterscheidungen; sie werden mit Hilfe von Determinantensätzen auf Verträglichkeit geprüft. Für jeden möglichen Typ eines Kurvenelements werden ein invarianter Parameter und in Abhängigkeit von ihm die Ableitungsgleichungen und die Kurveninvarianten angegeben. Jeweils werden die  $W$ -Kurven bestimmt, die eine eingliedrige Gruppe von solchen projektiven Abbildungen in sich gestatten, die die ausgezeichnete Quadrik festlassen. Dies wird dann verwendet zur Bestimmung aller eingliedrigen stetigen Untergruppen der genannten Untergruppe der projektiven Gruppe. — Auf Realitätsverhältnisse wird nicht geachtet; den Untersuchungen liegt von vornherein der komplexe  $R_4$  zugrunde; dies bringt natürlich auch eine Verallgemeinerung des Kugelbegriffs des Urbildraumes mit sich.

M. Barner.

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Mogi, Isamu: A remark on recurrent curvature spaces. Kodai math. Sem. Reports 1950, 73—74 (1950).

Conformément à une conjecture du rapporteur, l'A. établit que toute variété riemannienne à métrique définie positive et à courbure récurrente au sens de Ruse est une variété localement symétrique. On notera que la rédaction du § 2 du papier (cas où la courbure de Ricci est  $\neq 0$ ) est légèrement défectueuse puisque le théorème partiel énoncé à la fin de ce paragraphe utilise déjà implicitement le résultat du § 3 (cas où la courbure de Ricci est nulle). A. Lichnerowicz.

Chaki, M. C.: On a non-symmetric harmonic space. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 34—40 (1952).

Un espace riemannien  $V_n$ , dont la métrique a une signature arbitraire, est harmonique si l'équation  $\Delta_2 U = 0$  admet une solution élémentaire ne dépendant que de la distance géodésique  $s$ . Il est simplement harmonique si cette solution est  $s^{2-n}$  ( $n > 2$ ). Pour  $n = 3$  ou pour  $V_n$  de type hyperbolique normal, un espace harmonique est nécessairement à courbure constante. Le rapporteur avait émis la conjecture que tout  $V_4$  harmonique de métrique définie positive est symétrique au sens d'Elie Cartan et cette conjecture a été prouvée par A. G. Walker. L'A. donne ici un exemple intéressant d'espace  $V_4$  simplement harmonique et non symétrique. La métrique correspondante, nécessairement de signature  $++--$ , est

$$ds^2 = (x^2)^3 (dx^1)^2 + 2 x^1 x^2 dx^1 dx^2 + (x^1)^3 (dx^2)^2 + 2 dx^1 dx^3 + 2 dx^2 dx^4.$$

La non-symétrie est prouvée par le calcul du tenseur dérivé du tenseur de courbure, l'harmonicité par celui de l'invariant de Ruse qui vaut 1 pour un espace simplement harmonique. Par extension euclidienne, on obtient naturellement des espaces jouissant des mêmes propriétés et de dimension  $n$  quelconque. A. Lichnerowicz.

Guggenheimer, Heinrich: Vierdimensionale Einsteinräume. Rend. Mat. e Appl. 11, 362—373 (1952).

Etude des classes caractéristiques de Chern d'une variété  $M^{(2)}$  analytique complexe compacte, de dim. complexe 2, qui a un  $ds^2$  d'Einstein. Les classes  $c^2$  et  $c^4$  sont les classes de cohomologie entières de dim. (réelle) 2 et 4 respectivement;  $M$  étant la classe d'homologie fondamentale de  $M^{(2)}$ , on a:  $(c^2 \cup c^4) \cdot M = p^{(1)} - 1$ ;  $c^4 \cdot M = \chi$ , où  $\chi$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré, et  $p^{(1)}$  généralise le genre d'une variété algébrique. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un  $ds^2$  d'Einstein est  $0 \leq p^{(1)} - 1 \leq 3\chi$ ;  $\chi = 0$  entraîne que la métrique soit localement euclidienne. Etude énumérative des surfaces algébriques avec  $ds^2$  d'Einstein pour  $\chi \leq 8$ . Etude des métriques homogénétiqes (au sens de S. Bochner) de telles variétés quand le tenseur de courbure de Ricci n'est pas identiquement nul. En vue de généralisations à un nombre plus élevé de dimensions, on donne en appendice des conditions nécessaires sur les classes caractéristiques pour l'existence d'une telle métrique.

P. Lelong.

Rund, Hanno: Die Hamiltonsche Funktion bei allgemeinen dynamischen Systemen. Arch. der Math. 3, 207—215 (1952).

Les systèmes dynamiques envisagés sont les systèmes où l'énergie cinétique dépend d'une manière quelconque des composantes de vitesse et où il existe un potentiel pouvant dépendre du temps. Les considérations données ici sont proches de celles d'E. Cartan dans ses leçons sur les invariants intégraux et de certaines du rapporteur dans sa théorie des espaces variationnels

généralisés, valable aussi pour les systèmes sans potentiel. L'espace-temps de configuration du système dynamique est doué d'une structure de variété finslerienne  $F_n$  par la métrique  $ds^2 = \bar{L}^2(x, x') dx^\tau$  où  $\tau$  est un paramètre d'intégration et  $L$  est positivement homogène par rapport aux  $x'$ . Les trajectoires spatio-temporelles du système dynamique sont représentées par les extrémales de  $F_n$ . A la fonction  $L(x, x')$ , on peut associer d'une manière unique une fonction hamiltonienne  $H(x, y)$  par recours à l'équation tangentielle de l'indicatrice ou, ce qui est équivalent, en exprimant la distance élémentaire à l'aide des composantes covariantes  $y_i$  du vecteur de direction. Les extrémales peuvent alors être définies par les équations canoniques  $dx^i/dt = \partial H / \partial y_i$ ,  $dy_i/dt = -\partial H / \partial x^i$  sous la condition (C)  $H(x, y) = 1$ . La recherche des extrémales de  $F_n$  est équivalente à celle des courbes rendant extréma, sous la condition (C), l'intégrale  $\int y_i dx^i$ . L'A. termine en formant d'une manière élégante l'équation d'Hamilton-Jacobi dans son formalisme.

A. Lichnerowicz.

**Tonowaka, Keinosuke:** On intrinsic theories in the manifold of surface-elements of higher order. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., I. Ser. 12, 43—72 (1952).

Das  $K$ -dimensionale Flächenelement  $m$ -ter Ordnung in einem  $n$ -dimensionalen Raum wird durch das Wertesystem der Koordinaten  $x^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) und ihrer Ableitungen  $\partial x^i / \partial u^\alpha, \dots, \partial^m x^i / \partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_m}$  ( $\equiv p_{\alpha(m)}^i$ ) nach den Parametern  $u^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, K < n$ ) dargestellt, wenn die  $K$ -dimensionale Fläche durch Gleichungen in Parameterform  $x^i = x^i(u)$  gegeben ist.

Die Mannigfaltigkeit  $F_n^{(m)}$  der Flächenelemente  $m$ -ter Ordnung ist vom Ref. betrachtet worden (s. z. B. dies. Zbl. 6, 32). Unter der intrinseken Theorie in  $F_n^{(m)}$  verstehen wir die Theorie, die sich auf die beiden Transformationen von  $x$  und  $u$  bezieht (vgl. A. Kawaguchi und H. Hombu, dies. Zbl. 17, 425). In derselben Richtung und auch mit derselben Methode wie Kawaguchi und Hombu in der oben zitierte Arbeit studiert Verf. eingehender die intrinseke Theorie in  $F_n^{(m)}$ . Insbesondere beschäftigt er sich in einem großen Teil dieser Arbeit mit derjenigen  $F_n^{(m)}$ , deren Geometrie durch ein  $K$ -faches Integral der Form  $\int \dots \int F(x, p_\alpha, \dots, p_{\alpha(m)}) du^1 \dots du^K$

beherrscht wird, wobei das Integral als unter den beiden Transformationen von  $x$  und  $u$  invariant vorausgesetzt wird und sein Integrand  $F$  eine genügend oft differenzierbare Funktion der Flächenelemente  $m$ -ter Ordnung ist. Wegen der Invarianzeigenschaft des Integrals erhält man sogleich die Identität  $p_{\alpha'}^i \partial^2 F / \partial p_{\alpha(m)}^i \partial p_{\beta(m)}^j = 0$ , die zum  $u$ -Tensor  $P^{\alpha(N)\beta(N)}$  führt, wobei  $N = m(n-K)$ .

$u$ -Tensor bedeutet dabei Tensor in bezug auf die  $u$ -Transformationen,  $x$ -Tensor dagegen Tensor in bezug auf die  $x$ -Transformationen. Verf. benützt das Wort „Tensor“ in bezug auf  $x$ - und  $u$ -Transformationen, trotz des sonst üblichen Gebrauchs in bezug auf  $x$ -Transformationen.

Mittels einiger Techniken kann die Größe  $G_{\beta\gamma}^\alpha$ , die eine affine Übertragung in bezug auf die  $u$ -Transformationen bestimmt, aus dem  $u$ -Tensor  $P^{\alpha(N)\beta(N)}$  abgeleitet werden. Auf ähnliche aber etwas modifizierte Weise wie in einer Arbeit des Ref. [Proc. Acad. Tokyo 13, 237—240 (1937)] erhält Verf. dann die intrinseke Ableitung  $\Gamma_{\alpha}^k v^k = (\delta_i^k - p_{\beta}^i \mathbb{G}_{\beta}^k) v^i /_{\alpha} + A_{i\alpha}^k v^i$  ( $\mathbb{G}_{\beta}^k$  bedeutet den intrinseken Syngeschen Vektor und  $v^k /_{\alpha}$  ist die vollständige Ableitung des Vektors  $v^k$  nach

$u^\alpha$  d. h.  $v^k /_{\alpha} = \frac{\partial v^k}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=0}^m p_{\alpha(s+1)}^i \frac{\partial v^k}{\partial p_{\alpha(s)}^i}$ ), den Übertragungsparameter  $I_{i\gamma}^k$  entlang der Fläche,

die Grundübertragungen und die kovarianten Ableitungen. Die Torsions- und Krümmungstensoren werden auch berechnet. Zum Schluß verallgemeinert er die Methode von D. D. Kosambi (dies. Zbl. 14, 180) und führt die metrischen Tensoren und die metrische Übertragung ein, wobei er eine Methode des Ref. (dies. Zbl. 17, 229) benützt.

A. Kawaguchi.

**Kawaguchi, Akitsugu and Yoshi Katsurada (Miss):** On a connection in an areal space. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 369—385 (1949).

In einem  $n$ -dimensionalen Raum sei das Areal einer 2-dimensionalen Fläche  $x^i(u^\alpha)$  durch das Integral  $\int f(x^i, \partial x^i / \partial u^\alpha) du^1 du^2$  definiert. In Analogie zur Cartanschen Konstruktion in einem Finsler-Raum bestimmen die Verff. aus der Grundfunktion  $f$  die Parameter eines invarianten Differentials von Vektoren. Obwohl dabei die Existenz eines metrischen Tensors zweiter Stufe nicht vorausgesetzt wird, werden für die Grundfunktion  $f$  doch schwer übersehbare Beschränkungen gemacht. Dasselbe Problem wird von den Verff. in einer späteren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 45, 436) erneut behandelt.

W. Barthel.

**Libermann, Paulette:** Sur les structures presque quaternioniennes de deuxième espèce. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1030—1032 (1952).

Soit  $\hat{L}_n$  le sous-groupe du groupe linéaire  $L_{2n}$  de  $R^{2n}$  laissant invariants deux automorphismes  $I$  et  $J$  tels que  $I^2 = -1$ ,  $J^2 = 1$ ,  $IJ = -JI$ . Si  $n = 2p$ , les



automorphismes  $I, J$  et  $K = I J$  déterminent sur  $R^{4p}$  une structure de module  $M^p$  sur l'algèbre des „quaternions de 2<sup>e</sup> espèce“. L'A. étudie les structures infinitésimales définies sur une variété différentiable  $V_{2n}$  par restriction à  $\hat{L}_n$  du groupe structural  $L_{2n}$  de l'espace fibré  $T(V_{2n})$  des vecteurs tangents à  $V_{2n}$ . Si  $n = 2p$ , les structures obtenues sont appelées presque quaternioniennes de 2<sup>e</sup> espèce. A une structure donnée on peut associer d'une manière covariante une connexion affine. Pour une étude plus complète de ces structures voir la thèse de l'A. (ce Zbl. 56, 154).  
C. Ehresmann.

### **Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:**

Aleksandrov, A. D.: Ein Satz über Dreiecke im metrischen Raum und einige Anwendungen. Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 5—23 (1951) [Russisch].

Verf. betrachtet, wie stets in seinen Arbeiten, allgemeine metrische Räume ohne Analytizitätsvoraussetzungen, in denen man aber vor allem von kürzesten Kurven sprechen kann. Ein Dreieck  $OXY$  aus solchen Kürzesten, das hinreichend klein ist, kann mit dem Dreieck einer Fläche  $S_K$  konstanten Krümmungsmaßes  $K$  verglichen werden, das dieselben Seitenlängen besitzt. Der Winkel des  $S_K$ -Dreiecks an der  $O$  entsprechenden Ecke sei  $\gamma_K(x, y)$ . Der Wert

$$\alpha = \lim_{x, y \rightarrow 0} \gamma_K(x, y)$$

wird dann als Winkel zwischen den Kürzesten  $OX$  und  $OY$  definiert. Die Differenz der Summe der so definierten Winkel in einem Dreieck aus Kürzesten und der Summe des zugeordneten  $S_K$ -Dreiecks nennt Verf. den relativen  $K$ -Exzeß des geodätischen Dreiecks. Er sagt ferner, der ganze Raum besitze eine  $K$  nicht überschreitende Krümmung, wenn in hinreichend kleiner Umgebung jedes Punktes der relative  $K$ -Exzeß aller Dreiecke nicht positiv ist. Ist in einem solchen Raum  $V$  der obere Limes der relativen  $K$ -Exzesse aller Dreiecke  $AXY$ , wo  $X$  und  $Y$  Teilpunkte der geodätischen Bögen  $AB$  und  $AC$  und  $\alpha$  der oben erklärte Winkel bei der Ecke  $A$  ist, so gilt  $\alpha - \alpha_K < V$ . Eine schwächere Forderung an den Raum als die eben erwähnte über die  $K$ -Exzesse ist die folgende von Busemann: Die Entfernung der Seitenmitten eines Dreiecks soll nie größer sein als die entsprechende Strecke im zugeordneten  $S_K$ -Dreieck. Im weiteren Verlauf der Arbeit finden sich dann Abschätzungen für die obige Winkelfunktion  $\gamma_K(x, y)$  in Abhängigkeit von  $x$  und  $y$  sowie für ihre partiellen Ableitungen. Dabei wird  $\gamma_K(x, y)$  als nicht abnehmende Funktion ihrer Argumente nachgewiesen und gezeigt, daß man den Winkel  $\alpha$  auch durch

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \gamma_K(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \gamma_K(x, y)$$

definieren kann. Die erwähnte Abschätzung für  $\alpha - \alpha_K$  wird noch verfeinert zu:  $\alpha - \alpha_K \leq \delta_K(x, y) \leq \nu$ , wobei  $\delta_K(x, y)$  der relative  $K$ -Exzeß eines beliebigen Dreiecks  $AXY$  mit  $X$  und  $Y$  auf den beiden Kürzesten, die den Winkel  $\alpha$  bilden, ist. Schließlich wird auch noch von Räumen gesprochen, deren Krümmung  $\leq K$  und  $\geq K'$  ist. Dann gilt die Winkelabschätzung:  $\alpha_{K'} \leq \alpha \leq \alpha_K$  und  $\gamma_{K'}(x, y)$  erweist sich als nicht zunehmende Funktion von  $x$  und  $y$ .  
W. Burau.

Zalgaller, V. A.: Über eine Klasse von Kurven mit beschränkter Variation der Abweichung auf einer konvexen Fläche. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 59—72 (1952) [Russisch].

Die vorliegenden Untersuchungen, die eine weite Klasse von Kurven auf konvexen Flächen des  $R_3$  betreffen, schließen sich an frühere desselben Verf. und seines Lehrers Alexandrov an (vgl. insbesondere Zalgaller, dies. Zbl. 39, 181). Wichtig ist dabei vor allem der Begriff der rechten und linken Abweichung  $\sigma_r$  und  $\sigma_l$  eines beliebigen Kurvenstücks  $L$  auf der konvexen Fläche  $F$ , der bereits bei der Besprechung der vorherigen Arbeit erläutert wurde.  $\sigma = \inf \sum \min(\sigma_r, \sigma_l)$  heißt dann die Variation der Abweichung einer Kurve  $C$  auf  $F$ , wenn der untere Limes der Summe rechts sich auf beliebige Unterteilungen von  $C$  bezieht. Der wesentliche Inhalt der vorliegenden Arbeit ist dann der Nachweis der Äquivalenz von 4 Kurvenklassen  $K_1, \dots, K_4$

auf  $F$ , die folgendermaßen definiert werden:  $K_1$  besteht aus allen Kurven, die überall eine rechte und linke Tangente besitzen und ferner in endlich viele Teile zerfallen, derart, daß die Summen der Absolutbeträge der rechten Abweichungen in den offenen Teilen und an den Teilpunkten für jede derartige Unterteilung nach oben beschränkt sind.  $K_2$  besteht aus allen Kurven auf  $F$ , die als Kurven des  $R_2$  aufgefaßt, beschränkte Abweichungssummen für alle einbeschriebenen Polygone besitzen.  $K_3$  besteht aus allen Kurven, die sich in endlich viele Abschnitte teilen lassen, wovon jeder sich als Limes geodätischer Polygone von beschränkter Variation der Abweichungen auffassen läßt. Schließlich gehört die Kurve auf  $F$  zur Klasse  $K_4$ , wenn sie sich als Limes einer Folge geodätischer Polygone auf Flächen auffassen läßt, die ihrerseits gegen  $F$  konvergieren. Ferner müssen die Variationen der Abweichungen dabei gleichmäßig beschränkt bleiben. — Die nicht immer leicht durchschaubaren Beweise für diese Äquivalenzen geschehen in der in der Alexandrov'schen Schule üblichen Weise, also im wesentlichen durch mengentheoretische und Grenzbetrachtungen. W. Burau.

**Strehlke, Karl:** Planarkonvexe Bereiche im Raum von  $n$  komplexen Veränderlichen. Diss. math.-naturw. Fakultät Münster 1, 15—17 (1952).

In der vorliegenden Note werden Resultate einer Diss. auszugsweise mitgeteilt. — Ein Gebiet  $G$  im  $C^n$  heißt *planar-konvex*, wenn durch jeden Randpunkt von  $G$  eine analytische Ebene der (komplexen) Dimension  $n-1$  läuft, die nicht in  $G$  eindringt. Es werden die charakteristischen lokalen Randeigenschaften von  $G$  beschrieben und Zusammenhänge mit globalen Eigenschaften behandelt. Ist der Rand von  $G$  genügend glatt und „total-planarkonvex“, so geht auch durch jeden Punkt von  $C^n - G$  eine nicht in  $G$  eindringende  $(n-1)$ -dimensionale analytische Ebene. Dieses Analogon zu einer bekannten Aussage über elementargeometrisch konvexe Körper ist keineswegs trivial, da eine analytische Ebene den  $C^n$  nicht zerlegt. K. Stein.

**Hadwiger, H.:** Einige einfache Sätze über Distanzmittel bei konvexen Körpern. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 30—35 (1949).

Die Distanzmittelfunktion

$$M_\alpha(P) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \{p_v(P)\}^\alpha \right]^{1/\alpha},$$

wo  $p_v(P)$  die Distanz des Punktes  $P$  von dem beschränkten abgeschlossenen konvexen Körper  $A_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ) im  $k$ -dimensionalen euklidischen Raum vorstellt, ist für  $\alpha \geq 1$  eine konvexe Funktion. Analoges gilt für die Gegendistanzmittelfunktion  $N_\alpha(P)$ . Es folgt, daß die abgeschlossene Menge  $U_\alpha$  bzw.  $V_\alpha$  derjenigen  $P$ , in welchen  $M_\alpha(P)$  bzw.  $N_\alpha(P)$  ihr absolutes Minimum  $u_\alpha$  bzw.  $v_\alpha$  annimmt, für  $\alpha \geq 1$  ein konvexer Körper ist. Für  $\alpha = 1$  ist  $\dim V_\alpha \leq 1$  und kann  $\dim U_\alpha = k$  sein. Für  $\alpha > 1$  ist  $\dim U_\alpha \leq k-1$  und  $V_\alpha$  reduziert sich auf einen Punkt. J. J. Seidel.

**Fejes Tóth, L.:** Über das Problem der dichtesten Kugellagerung. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 632—642, ungarisch 619—631 und russische Zusammenfassg. 631 (1952).

It has long been conjectured that it is impossible to find a packing of equal spheres in space with a density greater than the density  $\pi/\sqrt{18} = 0,74048 \dots$  of the packing, in which the centres of the spheres are arranged in a lattice, each sphere touching just twelve others. The author gives a simple proof of the corresponding result for a plane packing of circles, similar to a proof he has given before (this Zbl. 22, 158). As in an earlier paper (this Zbl. 27, 341—342) he shows that the most natural generalization of the method would not lead to a proof of the conjecture, but that the result, that the density of a packing of spheres cannot exceed the ratio,  $0,7545 \dots$ , of the volume of a sphere to the volume of the circumscribed regular dodecahedron, would follow from certain plausible conjectures. The present paper differs from the previous one in that the author is able to make use of some of his results (this Zbl. 35, 245) which were previously unproved. C. A. Rogers.

**Boerdijk, A. H.:** Some remarks concerning close-packing of equal spheres. Philips Research Rep. 7, 303—313 (1952).

Three criteria are discussed for the „local density“ of a configuration of equal non-overlapping 3-dimensional spheres. Various configurations of spheres are described some being globular clusters, some being needles and one being a plane sheet. It is shown (or in some cases asserted) that according to the criteria the configurations have local densities in suitably chosen regions, which are higher than the corresponding local densities found in the closest lattice

arrangement of equal spheres. However, in the reviewer's opinion, it remains plausible to suppose that, in a system of four or more equal non-overlapping spheres, the ratio of the total volume of the spheres of the system to the volume of its least convex cover cannot exceed the density of the closest lattice packing. A „proof“ that it is not possible to place thirteen non-overlapping spheres in contact with a fourteenth is not complete (but see K. Schütte and B. L. Van der Waerden, this Zbl. 50, 167, for a complete proof).

*C. A. Rogers.*

**Wise, M. E.: Dense random packing of unequal spheres.** Philips Research Rep. 7, 321—343 (1952).

A system of non-overlapping spheres in three-dimensional space is said to be a dense packing, if all the centres lie in a polyhedron, which can be divided up into tetrahedra, such that each tetrahedron has the centres of four mutually touching spheres as its vertices and contains the centre of no other sphere of the system. Only those close packings, where the volume of the polyhedron is so large, in comparison with product of the radius of the largest sphere of the system and the surface of the polyhedron, that surface effects can be ignored, are considered. The author seeks a plausible distribution function for the radii of the spheres forming a tetrahedron in a „random“ arrangement of spheres of this form, in terms of the size distribution of the spheres used in the packing. Such a distribution function is found in the special case when the logarithm of the radii of the spheres is normally distributed with variance about 0.4. The distribution function is used to predict various geometrical properties of the random dense packing. The density is estimated to be 0.8. Estimates are made for the number of spheres touching a sphere of a given size and of the size distribution of the largest spheres which can be fitted into the centres of the tetrahedron without overlapping.

*C. A. Rogers.*

**Santaló, L. A.: Einige über die Halbkugel erstreckte Mittelwerte.** Math. Notae 12—13, 32—37 (1952) [Spanisch].

Formulae of integral geometry are used to evaluate some simple mean values on a hemisphere  $E$  of unit radius, in particular the mean distance  $4/\pi$  of two points of  $E$ , the mean area  $12/\pi - \pi$ , and the mean perimeter  $12/\pi$ , of a triangle whose vertices lie on  $E$ .

*L. C. Young (Math. Rev. 14, 788).*

## Topologie:

● **Kuratowski, Casimir: Topologie. Vol. I.** (Monografie Matematyczne, Tom XX.) 3<sup>ième</sup> éd. corrigée. Warszawa: Polskie Towarzystwo Matematyczne 1952. IX, 450 p.

● **Kuratowski, Casimir: Topologie. Vol. II.** (Monografie Matematyczne, Tom XXI.) 2<sup>ième</sup> éd. corrigée. Warszawa: Polskie Towarzystwo Matematyczne 1952. VIII, 443 p.

Bis auf kleine Verbesserungen unveränderter Nachdruck der zweiten bzw. ersten Auflage. Vgl. dieses Zbl. 41, 96.

**Hönig, Chaim Samuel: Über eine Methode der Verfeinerung von Topologien.** Bol. Soc. Mat. São Paulo 6, 1—52 (1952) [Portugiesisch].

A common method of constructing examples of curious topological spaces is to enlarge the family of open sets of a given topological space  $X$  by admitting as open all sets of the form  $G \cap A'$ , where  $G$  is open in  $X$  and  $A$  belongs to some specified ring  $\mathfrak{A}$  of subsets of  $X$ . For example, where  $X = [0, 1]$  with its usual topology, one may take  $\mathfrak{A}$  as all subsets of the set  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$  or as all subsets of  $[0, 1]$  having Lebesgue measure 0. This basic idea has been systematically exploited in the present thesis. For a topology  $\tau$  on a set  $E$  and any ring  $\mathfrak{A}$  of subsets of  $E$  such that  $A \in \mathfrak{A}$  implies that  $A$  has void interior under  $\tau$ , let  $\tau_{\mathfrak{A}}$  be the topology in which a basis for open sets consists of all sets  $G \cap A'$ , where  $G$  is open under  $\tau$  and  $A \in \mathfrak{A}$ . Typical theorems are the following: If  $\tau \leq \tau' \leq \tau_A$  (usual ordering), then  $\tau' = \tau_{\mathfrak{B}}$  for some ring  $\mathfrak{B}$  consisting of sets with void  $\tau$ -interior. The collection of all topologies  $\tau_{\mathfrak{A}}$  satisfies the hypothesis of Zorn's lemma, under the ordering  $\leq$ . If  $F$  is a regular space, then a mapping  $f$  of  $E$  onto  $F$  is  $\tau$ -continuous if and only if it is  $\tau_{\mathfrak{A}}$ -continuous, where  $\mathfrak{A}$  is any ring of subsets as above. The author reproduces much of the theory of semi-regular spaces expounded by M. H. Stone (this Zbl. 17, 135) and the reviewer [Duke math. J. 10, 309—333 (1943)]. His fundamental new result



is that if  $\tau_1$  is a semi-regular topology on  $E$  and  $\tau$  is any topology on  $E$ , then  $\tau_1$  is the semi-regular contraction of  $\tau$  if and only if  $\tau = \tau_1 \mathfrak{A}$  for some ring  $\mathfrak{A}$  of subsets of  $E$  having void  $\tau_1$ -interiors. Next, applications of the foregoing theory are made. It is first shown that the semi-regular contraction of an absolutely closed (Hausdorff) space is a minimal Hausdorff space. If a given topology  $\tau$  is absolutely closed, then every  $\tau_{\mathfrak{A}}$  is also. The following interesting characterization of absolutely closed spaces is given: a topology  $\tau$  is absolutely closed if and only if  $\tau = (\tau^*)_{\mathfrak{A}}$  ( $\tau^*$  is the semi-regular contraction of  $\tau$ ), where  $\tau^*$  is a minimal Hausdorff space. A theorem of the reviewer [loc. cit., Theorem 25] dealing with the existence of irresolvable spaces is re-proved; the methods of proof are very similar. Extremal disconnectivity (little new), extensibility of continuous mappings (interesting observations), and various special examples, conclude the thesis. *E. Hewitt* (M. R. 14, 669).

**Morita, Kiiti:** On bicompactifications of semibicompact spaces. Sci. Reports Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A, 4, 222—229 (1952).

Verf. beweist den Satz, daß jeder semibikompakte (jeder Punkt hat beliebig kleine Umgebungen mit bikompaktem Rand) Hausdorffsche Raum  $E$  dicht eingebettet werden kann in einen bikompakten Raum  $\gamma E$ , wobei (1) jeder Punkt von  $\gamma E$  beliebig kleine Umgebungen besitzt, deren Rand in  $E$  liegt und (2) jede andere bikompakte Erweiterung  $K$  von  $E$  ( $E$  dicht in  $K$ ), für die (1) ebenfalls gilt, stetiges Bild von  $\gamma E$  ist bezüglich einer Abbildung, die auf  $E$  die identische Abbildung induziert. Der Raum  $\gamma E$ , der von Freudenthal auf anderem Wege definiert und unter weiteren Einschränkungen für  $E$  untersucht wurde [H. Freudenthal, dies. Zbl. 60, 400 (1)], wird hier erhalten als die vollständige Hülle von  $E$  bezüglich der uniformen Struktur, die definiert ist durch die endlichen Überdeckungen von  $E$  durch offene Mengen mit bikompaktem Rand.  $\gamma E$  wird gekennzeichnet unter allen bikompakten Erweiterungen von  $E$  mit der Eigenschaft (1) durch die Bedingung, daß je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen in  $E$  mit bikompaktem Rand disjunkte abgeschlossene Hüllen in  $\gamma E$  haben. Weiterhin wird für die Charaktere  $m$  von  $E$  und  $m^*$  von  $\gamma E$  sowie die Anzahl  $n$  der offen-abgeschlossenen Mengen von  $E$  die interessante Beziehung  $m^* = \max\{m, n\}$  bewiesen, nebst einer Reihe von Folgerungen hieraus. Ferner wird gezeigt: Hat  $E$  eine abzählbare Basis, so besitzt  $E$  ein Kompaktum als Erweiterung mit der Eigenschaft (1). Daneben werden noch von Freudenthal, Zippin und Nöbeling stammende Sätze aus der Erweiterungstheorie hergeleitet. Die Methoden fußen auf der Theorie der uniformen Strukturen, und zwar in der von Tukey (Convergence and uniformity in topology, Princeton 1940 angegebenen Form. *B. Banaschewski*).

**Ganea, Tudor:** Covering spaces and Cartesian products. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 30—42 (1952).

In what follows no separation axiom is assumed; simply connectedness is meant in the sense of Chevalley. Let  $\{E_\lambda\}$  denote an arbitrary family of connected, locally connected topological spaces;  $E = \prod E_\lambda$  be the product space. The author proves the following generalizations of classical results: Necessary and sufficient for the simply connectedness of  $E$  is the simply connectedness of each  $E_\lambda$ . Necessary and sufficient for the space  $E$  to possess a simply connected covering space, is that each  $E_\lambda$  possesses a simply connected covering space and that almost all  $E_\lambda$  be simply connected. Necessary and sufficient for the unicoherence of  $E$  is the unicoherence of each  $E_\lambda$ . A space  $S$  is multicoherent if and only if it possesses a regular, cyclic, infinite covering space  $(\tilde{S}, g)$  such that  $S = S_1 \cup S_2$ , where  $S_i$  is open, connected and evenly covered by  $(\tilde{S}, g)$ . A previous result of the author (this Zbl. 44, 379) shows that these theorems do not overlap with classical results. *St. R. Fary*.

**Ganea, Tudor:** Zur Multikohärenz topologischer Gruppen. Math. Nachr. 7, 323—334 (1952).

The main theorems proved in this paper are: (a) If the multicoherence degree  $r(E)$  (in the sense of A. H. Stone, cf. this Zbl. 34, 397) of a connected locally connected space  $E$  is  $\geq n$ , then to any group  $\mathfrak{F}$  on  $n$  generators there exists a covering space  $(\tilde{E}, f)$  of  $E$  (in the sense of Chevalley) such that the associated covering group is  $\mathfrak{F}$ . (b) A connected and locally connected space  $X$  is unicoherent if and only if any map of  $X$  into a connected and locally connected space  $Y$  can be lifted to any binary covering space  $(\tilde{Y}, g)$  of  $Y$ .  $(\tilde{Y}, g)$  is called a binary covering space of  $Y$ , if  $Y$  is the sum of two open connected sets which are evenly covered by  $(\tilde{Y}, g)$ . Using these theorems the author proves that for any topological group  $G$  which is the homomorphic image of a unicoherent connected and locally connected topological group (and in particular for any  $G$  which

has a simply connected, connected and locally connected covering group)  $r(G) \geq 1$ . More generally it is proved: If  $X$  is a connected locally connected unicoherent space,  $\mathfrak{S}$  a transformation group of  $X$  such that for the orbit space  $Y = X/\mathfrak{S}$ ,  $r(Y) \geq n$ , then  $\mathfrak{S}$  has a free group on  $n$  generators as a direct factor. No topological separation axioms are assumed at all in the theorems and the proofs. W. T. van Est.

● **Pontryagin, L. S.:** Foundations of combinatorial topology. Translated from the first (1947) Russian ed. by F. Bagemihl, H. Komm and W. Seidel. Rochester: The Graylock Press 1952 XII, 99 p. \$ 3,00.

Eine sehr sorgfältige Übersetzung des 1947 erschienenen Buches. Für den Inhalt vgl. das Referat über die inzwischen erschienene deutsche Übersetzung in diesem Zbl. 71, 161. E. Pannwitz.

**Yang, Chung-Tao:** On Borsuk's problem. Summa Brasil. Math. 3, 13—20 (1952).

Two topological spaces are  $R$ -equivalent if each one is homeomorphic to a retract of the other. The Borsuk's problem is established „whether  $R$ -equivalent spaces have isomorphic cohomology groups?“. The author's answer is affirmative for some cases; the cohomology groups are finitely generated modules over a semi-simple ring, etc. The problem has a positive answer if the following algebraic problem does so. „Are two additive groups isomorphic if each one is isomorphic to a direct summand of the other?“. The cohomology groups treated here are those of Alexander-Kolmogoroff. A. Komatu.

**Liao, S. D.:** A theorem on periodic transformations of homology spheres. Annals of Math., II. Ser. 56, 68—83 (1952).

L'A. résout un problème posé par P. A. Smith en énonçant le théorème suivant: soit  $X$  un espace compact de dimension finie ayant l'homologie d'une  $n$ -sphère (coefficients entiers modulo  $p$ ,  $p$  premier) et soit  $T$  un homéomorphisme de période  $p$  sur  $X$ ; — on sait d'après Smith que l'ensemble  $L$  des points fixes de  $T$  est une  $r$ -sphère homologique — l'entier  $n - r$  est pair ou impair, selon que  $T$  est un homéomorphisme direct ou non. On suppose bien entendu que l'homologie de  $A$ , en coefficients entiers, admet un nombre fini de générateurs. L'identité suivante est utilisée:  $\chi(O, J_p) = \chi(O, R)$ ,  $J_p$  groupe des entiers modulo  $p$ ,  $R$  groupe des rationnels,  $O$  espace des trajectoires de  $T$ ,  $\chi$  caractéristique d'Euler-Poincaré. G. Reeb.

**Floyd, E. E.:** On related periodic maps. Amer. J. Math. 74, 547—554 (1952).

Le titre fait allusion à des classes d'homéomorphismes considérés par Liao (voir le rapport précédent). L'A. généralise d'abord le résultat de Liao à des homéomorphismes  $T$  d'un compact  $X$  de période  $p^\alpha$ ,  $p$  premier, en établissant que le nombre de Lefschetz de  $T$  est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $X$  (avec les hypothèses de finitude habituelles). L'A. étudie en suite les homéomorphismes  $T_1$  de période  $p^\alpha$  voisins de  $T$ , et établit que l'ensemble des points fixes de  $T_1$  est voisin de l'ensemble des points fixes de  $T$  (la métrique utilisé est due à Begle [Duke Math. J. 11, 441—450 (1944)]). G. Reeb.

**Thom, R.:** Une théorie intrinsèque des puissances de Steenrod. Colloque de Topologie de Strasbourg 1951, Nr. 6, 13 p. (1952).

The author first gives a reformulation of the Smith-Richardson theory concerning periodic transformations of topological spaces (cf. Appendix B of Lefschetz, Algebraic Topology, New York 1942), and, by applying this theory, gives axiomatic characterizations of the reduced  $p$ -th powers of Steenrod (this Zbl. 48, 413) for the case where  $p$  is a prime. Suppose that for each pair  $(E, F)$  consisting of a topological space  $E$  and a subspace  $F$  of  $E$ , and for each integer  $i$  a homomorphism  $D^i: H^r(E, F) \rightarrow H^{r+i}(E, F)$  of the cohomology groups with mod  $p$  coefficients is defined so as to satisfy the following conditions. (1) If  $x \in H^r(E, F)$ ,  $D^i x = 0$  for  $i < 0$  or  $i$  odd or  $i > r(p-1)$ ;  $D^0 x = m x$  with an integer  $m \neq 0$ ;  $D^{r(p-1)} x = x^p$  (cup product). (2)  $D^i(u \cup v) = \sum_j D^j(u) \cup D^{i-j}(v)$ . (3) If  $\delta$  is the coboundary homomorphism, then  $D^i \delta = m \delta D^i$

with an integer  $m \neq 0$ . (4)  $D^i$  commutes with the homomorphism  $f^*: H^n(F) \rightarrow H^n(E)$  induced by a continuous map  $f: E \rightarrow F$ . The theorem of the author and Wu asserts that  $D^i$  differs only a trivial factor from the Steenrod cyclic reduced  $p$ -th power for  $p > 2$ . For the case  $p = 2$  the



above conditions are modified as follows: in (1) the condition  $D^i x = 0$  for  $i$  odd is omitted; the integer  $m$  appearing in (1) and (3) is assumed to be 1; (4) is omitted. Under this assumption  $D^i$  must be the Steenrod square  $Sq^i$  (this Zbl. 30, 416). For this case  $p = 2$  cf. also an independent work of R. Bott (this Zbl. 53, 301). K. Morita.

**Thom, René: Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod.** Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 69, 109—182 (1952).

Diese Arbeit bringt die ausführlichen Beweise von früher angekündigten Resultaten (dies. Zbl. 41, 99, 100) samt Anwendungen und dann Untersuchungen über berandete Mannigfaltigkeiten, die Verf. inzwischen in so erfolgreicher Weise fortgeführt hat (dies. Zbl. 57, 155). Ref. begnügt sich hier mit einer kurzen Inhaltsangabe: In einer Einleitung gibt Verf. eine Zusammenstellung der von ihm benötigten Resultate der Garbentheorie im Anschluß an die Seminare von H. Cartan (dies. Zbl. 35, 246; 67, 154). Die Cohomologie wird mit Trägern in einer Familie von abgeschlossenen Mengen eingeführt. Anwendungen auf die Theorie der Mannigfaltigkeiten (Poincarésche Dualität) werden besprochen. Das erste Kapitel bezieht sich auf die additive Cohomologietheorie der in Sphären gefaserten Räume. Es sei  $E$  ein Bündel über  $B$  mit der Sphäre  $S^{k-1}$  als Faser und der Projektion  $p$  von  $E$  auf  $B$ . Es sei  $A'$  bzw.  $A$  das zugehörige Bündel mit der offenen bzw. abgeschlossenen Vollkugel des  $R^k$  als Faser.  $A$  ist der „mapping cylinder“ von  $p$ .  $E$  und  $A'$  sind Unterräume von  $A$ , und es ist  $A' = A - E$ . Man hat dann die folgende exakte Cohomologiesequenz, die Ref. hier der Kürze wegen in nachlässiger Weise ohne Angabe der für die Cohomologie verwendeten Koeffizientenbereiche und Trägerfamilien angibt:  $\dots \rightarrow H^{r-1}(E) \rightarrow H^r(A') \rightarrow H^r(A) \rightarrow H^r(E) \rightarrow \dots$ . Verf. beweist die Isomorphismen  $H^i(B) \cong H^i(A)$  und  $H^{r-k}(B) \cong H^r(A')$ , was zu der folgenden exakten Sequenz führt:  $\dots \rightarrow H^{r-1}(E) \rightarrow H^{r-k}(B) \xrightarrow{\mu} H^r(B) \xrightarrow{p^*} H^r(E) \rightarrow \dots$ . Der Homomorphismus  $p^*$  ist dabei durch die Projektion  $p$  von  $E$  auf  $B$  induziert. In  $B$  läßt sich eine Cohomologieklass  $W^k \in H^k(B)$  derart einführen, daß  $\mu$  die Cup-Multiplikation mit  $W^k$  wird.  $W^k$  kann, wenn die Fasern von  $E$  kohärent orientiert sind, als ganzzahlige Cohomologieklass definiert werden. Dem Einselement des Cohomologieringes  $H^*(B)$  entspricht vermöge des Isomorphismus  $H^0(B) \cong H^k(A')$  ein Element  $U \in H^k(A')$ . Das Element  $U \cup U \in H^{2k}(A')$  entspricht vermöge des Isomorphismus  $H^k(B) \cong H^{2k}(A')$  dann  $W^k$ . Diese Tatsache führt Verf. im II. Kapitel zu folgendem: Auf  $U$  wird das Steenrodsche reduzierte Quadrat  $Sq^i$  angewandt. Es sei  $1 \leq i < k$ . Das Element  $Sq^i U \in H^{k+i}(A')$  ist mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}_2$  bzw.  $\mathbb{Z}$  definiert, je nachdem  $i$  gerade oder ungerade ist. (Man hat hier wieder vorauszusetzen, daß die Fasern von  $E$  kohärent orientiert sind; oder man muß für ungerades  $i$  lokale Koeffizienten einführen.) Vermöge des Isomorphismus  $H^i(B) \cong H^{k+i}(A')$  entspricht  $Sq^i U$  einer Cohomologieklass  $W^i \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$  bzw.  $W^i \in H^i(B, \mathbb{Z})$ . Es sind also jetzt für das Sphärenbündel  $E$  charakteristische Klassen  $W^r$  definiert ( $1 \leq r \leq k$ ). Wichtig ist, daß diese charakteristischen Klassen ohne Einschränkung über die Strukturgruppe des Bündels  $E$  definiert sind. Das fundamentale Resultat dieser Arbeit ist, daß die so definierten Klassen mit den Stiefel-Whitneyschen Klassen übereinstimmen, wenn  $E$  die orthogonale Gruppe als Strukturgruppe zuläßt. Verf. gibt nun im Kapitel III viele interessante Anwendungen dieses Resultates. Die Stiefel-Whitneyschen Klassen des Normalbündels einer Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit können mit Hilfe von Steenrodschen Quadraten erhalten werden. Anwendung auf die Diagonale des cartesischen Quadrates einer Mannigfaltigkeit ergibt, daß die Stiefel-Whitneyschen Klassen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit topologisch invariant sind. Whitney hat mit Hilfe der Stiefel-Whitneyschen Klassen notwendige Bedingungen dafür angegeben, daß eine gegebene differenzierbare Mannigfaltigkeit in einen Euklidischen Raum gegebener Dimension eingebettet werden kann. Diese Sätze sind auf Grund der Resultate des Verf. richtig ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen und lassen weitere Verallgemeinerungen zu. Im folgenden Kapitel untersucht Verf., wie weit die Stiefel-Whitneyschen Klassen als Homotopieinvarianten definiert werden können. Dazu wird der Homotopietyp eines Faserbündels eingeführt. Im letzten Kapitel behandelt Verf. die berandeten Mannigfaltigkeiten. U. a. wird gezeigt, daß eine mod 2 berandete Mannigfaltigkeit verschwindende Stiefel-Whitneysche Zahlen, also insbesondere gerade Euler-Poincarésche Charakteristik hat, und daß eine berandete orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension  $4m$  verschwindenden Index  $\tau$  hat. Auf die zu Beginn des Referats zitierte neuere Arbeit des Verf. werde wegen ihrer Wichtigkeit nochmals ausdrücklich aufmerksam gemacht.

F. Hirzebruch.

**Hirsch, Guy: Sur les invariants attachés aux sections dans les espaces fibrés.** Colloque de Topologie de Strasbourg 1951, Nr. 7, 13 p. (1952).

Es sei  $E$  gefasert über  $B$  mit  $F$  als typischer Faser und mit der Projektion  $\pi: E \rightarrow B$ . Für die Kohomologie werde ein Körper  $K$  als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt und dann vorausgesetzt, daß  $H^*(E)$ ,  $H^*(B)$ ,  $H^*(F)$  endlich-dimensionale Vektorräume über  $K$  sind und daß für die Einbettung  $j$  von  $F$  in  $E$  der Homomorphismus  $j^*$  ganz  $H^*(F)$  als Bild hat. Die Kohomologie



der Fasern bildet dann eine konstante Garbe über  $B$  und die Spektralsequenz endet mit  $E_2 = E_\infty = H^*(B) \otimes H^*(F)$ . Dieses Tensorprodukt ist als Vektorraum isomorph zu  $H^*(E)$ . Ein Isomorphismus  $f$  kann folgendermaßen erhalten werden: Man wähle einen Isomorphismus  $\text{ext}$  des Vektorraumes  $H^*(F)$  in den Vektorraum  $H^*(E)$ , der die Graduierung respektiert und für den  $j^* \circ \text{ext} = \text{Id}$ . Man setze dann  $f = (\pi^* \otimes 1) \cup (1 \otimes \text{ext})$ , wo  $\cup$  das Produkt von  $H^*(E)$  ist. Die multiplikative Struktur von  $H^*(E)$  kann dann vermöge  $f^{-1}$  auf  $H^*(B) \otimes H^*(F)$  übertragen werden. Dieses Tensorprodukt ist dann im allgemeinen mit zwei verschiedenen multiplikativen Strukturen versehen, nämlich mit der von  $H^*(B \times F)$  und der von  $H^*(E)$ . Diese beiden Ringe sind i. a. nur als  $H^*(B)$ -Modul isomorph. Die multiplikative Struktur von  $H^*(E)$  übertragen durch  $f^{-1}$  auf das Tensorprodukt wird durch eine Abbildung von  $H^*(F) \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(B) \otimes H^*(F)$  beschrieben. Nachdem in  $H^*(F)$  eine Basis ausgezeichnet wurde, kann man die letzte Abbildung durch gewisse Kohomologieklassen von  $B$  kennzeichnen, die natürlich von der Wahl von  $\text{ext}$  abhängen. Gewisse Polynome in den gerade erwähnten Kohomologieklassen werden bei Festlegung der Basis aber von  $\text{ext}$  unabhängig sein. Dies führt zu „charakteristischen Klassen“ von  $(E, B, F)$  definiert durch Kohomologiering-Eigenschaften des Totalraumes  $E$ . Wenn z. B. die Faser  $F$  der komplexe projektive Raum  $P_{n-1}(C)$  ist, dann führt die Konstruktion des Verf. zu den charakteristischen Klassen der Gruppe  $PU(n)$ . — Für eine Schnittfläche  $s: B' \rightarrow E$  über einem Skelett  $B'$  geeigneter Dimension von  $B$  erhält man einen Homomorphismus  $s^*: H^*(E) \rightarrow H^*(B')$ . Läßt man nur solche Homomorphismen  $\text{ext}$  zu, deren Bild im Kern von  $s^*$  enthalten ist, dann werden noch weitere von den oben erwähnten Polynomen von  $\text{ext}$  unabhängig sein. Schließlich erwähnt Verf. noch die „höheren Hindernisse“, die man einem Paar von Schnittflächen in diesem Zusammenhang zuordnen kann.

F. Hürzbruch.

**Cartan, Henri et Jean-Pierre Serre: Espaces fibrés et groupes d'homotopie. II. Applications.** C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 393—395 (1952).

Wenn eine topologische Abbildung  $f: Y \rightarrow X$  in einen bogenweise zusammenhängenden Raum  $X$  eine Isomorphie  $\pi_i(Y) \cong \pi_i(X)$  ( $i > n$ ) induziert, während  $\pi_j(X) = 0$  ( $j \leq n$ ) ist, sagt man,  $Y$  tötet die  $\pi_j(X)$ . In diesem Fall sind die Homologiegruppen  $H_k(Y)$  isomorph zur Eilenbergschen Gruppe  $H_k(X, x, n+1)$  ( $x \in X$ ) und man bezeichnet deshalb den Typ eines solchen  $Y$  mit  $(X, n+1)$ . Verff. haben (dies. Zbl. **48**, 413) zu gegebenem  $X = X_1$  eine Faserungsfolge  $X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow X_3 \leftarrow \dots$  (mit zwei Möglichkeiten für die Faser) konstruiert mit  $X_{n+1} = (X_n, n+1)$ . Hieraus wird eine exakte Homologiegruppenfolge der Länge  $3n$  hergeleitet, aus der sich durch Spezialisierung die meisten bekannten Beziehungen zwischen Homologie und Homotopie ergeben. [Ähnliche Überlegungen hat G. W. Whitehead (dies. Zbl. **48**, 413) angestellt.] Anwendungsbeispiele: Alle Homotopiegruppen Liescher Gruppen sind endlich, und für Sphären:  $H_{2q+1}(S_3, 4) = 0$ ,  $H_{2q}(S_3, 4) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , die  $p$ -Komponente von  $\pi_{2p}(S_3)$  ist  $\mathbb{Z}_p$  ( $p$  Primzahl), wodurch sich ein neuer Zugang zu bekannten Resultaten über  $\pi_i(S_3)$  auftut. Ernst Witt.

**Rochlin, V. A.: Eine innere Definition der charakteristischen Zyklen von Pontrjagin.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 449—452 (1952) [Russisch].

Für Pontrjagins charakteristische Zyklen einer orientierten Mannigfaltigkeit  $M$  (dies. Zbl. **37**, 103, 105) gibt Verf. eine Definition, die nur innere Eigenschaften von  $M$  benutzt. Dem  $r$  sei der  $n$ -dimensionale euklidische Raum,  $E$  die Mannigfaltigkeit aller (geordneten) Systeme von  $m$  Vektoren des  $R^n$ . Wie bei Pontrjagin werden mittels einer ganzzahligen, nicht negativen und nicht abnehmenden Funktion  $\sigma(h)$ ,  $h = 0, 1, \dots, n-1$ , in  $E$   $\sigma$ -Singularitäten (l. c. „vom Typus  $\sigma$ “) definiert.  $Q_\sigma$  sei die Mannigfaltigkeit der Elemente von  $E$ , die nicht  $\sigma$ -Singularitäten sind. Die Homotopiegruppen  $\pi_i(Q_\sigma)$  sind trivial für  $j \leq r-2$ ,  $r = r(\sigma) = \sum_h \sigma(h)$ ;  $\pi_{r-1}(Q_\sigma)$  ist eine

zyklische Gruppe (frei oder von der Ordnung 2). Bei fester Orientierung von  $R^n$  läßt sich eine bestimmte Erzeugende von  $\pi_{r-1}(Q_\sigma)$  auszeichnen. — Es sei  $\Pi$  ein orientierter gefaseter Raum mit einem endlichen Komplex  $K$  als Basisraum und euklidischen Räumen  $R_x^n$  ( $x \in K$ ) als Fasern. Mittels der ausgezeichneten Erzeugenden ist dann ein natürlicher Isomorphismus zwischen den  $\pi_{r-1}(Q_{\sigma x})$  gegeben, diese Gruppen können also alle zu einer Gruppe  $\pi_{r-1}(Q_\sigma)$  identifiziert werden. — In  $\pi$  sei  $F_m(x)$  ein Feld von  $x$  stetig abhängender Systeme von  $m$  Vektoren der Fasern  $R_x^n$ . Man kann, weil die  $\pi_j(Q_\sigma)$  für  $j \leq r-2$  trivial sind,  $F_m(x)$  ohne  $\sigma$ -Singularitäten auf dem  $(r-1)$ -dimensionalen Gerüst von  $K$  konstruieren. Das auf dem Rand eines  $r$ -dimensionalen Simplexes von  $K$  gegebene Feld  $F_m$  bestimmt ein gewisses Element der Gruppe  $\pi_{r-1}(Q_\sigma)$ ; die  $r$ -dimensionalen Simplexe von  $K$ , mit diesen Koeffizienten genommen, bilden einen Cozyklus bez. des Koeffizientenbereichs  $\pi_{r-1}(Q_\sigma)$ ; seine Cohomologiekategorie hängt nicht von der speziellen Wahl von  $F_m$  ab. Nimmt man für  $K$  eine  $M$ , für  $\Pi$  die Mannigfaltigkeit ihrer Linienelemente, so kommt man, wenn man zu den dualen Zyklen übergeht, zu Pontrjagins charakteristischen Zyklen.

E. Pannwitz.

**Blanchard, André: Variétés kählériennes et espaces fibrés.** C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 284—286 (1952).

Es sei  $E$  ein komplex-analytischer Prinzipal-Faserraum mit der Faser  $T$  und der kählerschen Basis  $B$ . Für eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit  $V$  be-

zeichne  $A^0(V)$  die Identitätskomponente der Automorphismengruppe von  $V$ . Es werden die folgenden drei Sätze mitgeteilt und ihre Beweise skizziert: (1) Wenn  $T$  ein (komplexer) Torus, wenn  $B$  kompakt und wenn die erste Bettische Zahl von  $B$  Null ist, dann ist die natürliche Abbildung  $A^0(E) \rightarrow A^0(B)$  eine Abbildung „auf“. (2) Wenn  $T$  eine beliebige Abelsche Gruppe und wenn  $B$  kompakt ist, dann ist die Existenz eines invarianten analytischen Zusammenhanges äquivalent mit der Tatsache, daß die topologische Hindernisklasse der Faserung durch eine harmonische Differentialform vom Typus  $(2, 0)$  in  $B$  repräsentiert wird. (3) Wenn  $T$  ein Torus ist, so ist die Existenz einer kählerschen Metrik in  $E$  äquivalent mit der Existenz eines integralen Zusammenhanges.

H. Hopf.

**Guggenheimer, H.: Variétés symplectiques.** Colloque de Topologie de Strasbourg 1951, Nr. 1, 14 p. (1952).

Symplektische Mannigfaltigkeiten  $V_{2n}$  sind  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten, in denen eine äußere Form  $\Omega = \sum h_{ij} dx^i \wedge dx^j$  vom Range  $2n$  mit  $d\Omega = 0$  gegeben ist (vgl. Ch. Ehresmann, dies. Zbl. 41, 129).  $F^r$  bezeichne den Vektorraum der äußeren  $r$ -Formen auf  $V_{2n}$  und  $H^r$  den Vektorraum der harmonischen  $r$ -Formen. Nach Hodge-de Rham ist  $H^r$  für geschlossene Mannigfaltigkeiten isomorph der  $r$ -ten Cohomologiegruppe mit reellen Koeffizienten. Verf. betrachtet folgende beiden Operatoren:  $Lf^r = f^r \wedge \Omega$  und  $Kf^r = (-1)^r * L * f^r$  ( $f^r \in F^r$ ), wobei  $*$  den Operator der Adjungiertenbildung bezeichnet. Eine äußere Form  $f^r$  heißt von der Klasse  $k$ , wenn es eine Form  $g^{r-2k}$  gibt mit  $f^r = L^k g^{r-2k}$  und  $Kg^{k-r} = 0$ . Die  $r$ -Formen der Klasse  $k$  bilden einen Vektorraum  $F_k^r$ . Setzt man nun noch  $H_k^r = H^r \cap F_k^r$ , so läßt sich der erste Teil des Hauptsatzes der Arbeit wie folgt formulieren:  $H^r$  ist direkte Summe der  $H_j^r$  ( $j \leq [r/2]$ ) für  $r \leq n$ . Der zweite Teil des Satzes besagt: Es läßt sich auf  $F^r$  ein Operator  $C$  definieren, der einen Automorphismus auf  $H^r$  bewirkt. Die Definition von  $C$  kann hier nicht wiedergegeben werden. Der Satz gilt außer für geschlossene symplektische Mannigfaltigkeiten auch für solche mit vernachlässigbarem Rand und hat wichtige topologische Konsequenzen, von denen nur die folgenden beiden genannt seien: Für die Bettischen Zahlen gilt:  $b_r - b_{r-2} \geq 0$  und  $b_{2k+1} \equiv 0 \pmod{2}$ . Eine geschlossene symplektische Untermannigfaltigkeit der  $V_{2n}$  ist niemals homolog 0. Es folgen noch Anwendungen auf Bochnersche und Kählersche Mannigfaltigkeiten.

W. Rinow.

**Allendoerfer, Carl B.: Cohomology on real differentiable manifolds.** Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 428—435 (1952).

In den Sätzen von de Rham über die Beziehungen zwischen den Differentialformen und den Cohomologien in differenzierbaren Mannigfaltigkeiten handelt es sich um Cohomologien über dem reellen Koeffizientenbereich. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß auch für ganzzahlige Cohomologien und für solche mod.  $p$  analoge Sätze gelten, falls man Differentialformen mit Singularitäten heranzieht. Ferner wird darauf hingewiesen, daß auch die Theorie der harmonischen Differentialformen von Hodge und Kodaira in ähnlicher Weise ausgedehnt werden kann.

H. Hopf.

**Calabi, Lorenzo: I gruppi semisemplici di Lie che operano sullo spazio euclideo ad  $n$  dimensioni.** Rend. Mat. e Appl. 11, 323—335 (1952).

Cet article donne une liste d'espaces homogènes homéomorphes à l'espace euclidien  $R^n$ , de groupes de Lie semi-simples. Cependant, contrairement à ce que l'A. affirme démontrer, cette liste est incomplète. L'erreur provient du lemme 1 sur les sous-groupes contenant un sous-groupe compact maximal. L'A. ne démontre pas non plus complètement le Corollaire 2, disant qu'un quotient  $G/H$  ( $G$  semi-simple), est homéomorphe à  $R^n$  si et seulement si  $H$  est connexe et contient un sous-groupe compact maximal de  $G$ . Cela a été établi récemment par G. D. Mostow, pour  $G$  groupe de Lie quelconque (ce Zbl. 67, 160).

A. Borel.

**Hilton, P. J.: The Hopf invariant and homotopy groups of spheres.** Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 547—554 (1952).

Verf. hat in einer früheren Arbeit (s. dies. Zbl. 45, 120) einen Homomorphismus  $H^*: \pi_r(S^n) \rightarrow \pi_{r+1}(S^{2n})$  definiert, der im Falle  $r = 2n - 1$ , in dem  $\pi_{r+1}(S^{2n})$  mit der Gruppe der ganzen Zahlen identifiziert werden kann, die im Titel erwähnte, im folgenden mit  $\gamma$  bezeichnete Invariante darstellt. Es werden zwei Sätze über  $H^*$

bewiesen, die für  $r = 2n - 1$  in die folgenden bekannten Eigenschaften von  $\gamma$  übergehen:  $\gamma(f \circ \varphi) = \gamma(f) \cdot c(\varphi)$ ,  $\gamma(\psi \circ f) = c(\psi)^2 \cdot \gamma(f)$ , wobei  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ ,  $\varphi: S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$ ,  $\psi: S^n \rightarrow S^n$  ist und  $c$  den Abbildungsgrad bezeichnet. Mit Hilfe dieser Sätze über  $H^*$  (deren Formulierung hier zu weit führen würde) werden in vielen Sphären-Homotopiegruppen nicht-triviale Elemente nicht nur nachgewiesen, sondern auch explizit identifiziert. — Ferner wird der Gültigkeitsbereich der von G. W. Whitehead aufgestellten distributiven Formeln  $(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha + [\beta_1, \beta_2] \circ H(\alpha)$  erweitert; in dieser Formel sind  $\alpha \in \pi_r(S^n)$ ,  $\beta_1, \beta_2 \in \pi_n(X)$ , der Kreis steht für die Zusammensetzung, die eckige Klammer für das J. H. C. Whiteheadsche Produkt,  $H$  ist ein (von G. W. Whitehead eingeführter) Homomorphismus  $\pi_r(S^n) \rightarrow \pi_r(S^{2n-1})$ , aus dem  $H^*$  durch Einhängung entsteht. Die Formel war ursprünglich nur für  $r < 3n - 3$  bewiesen, jetzt wird sie auf eine große Anzahl von Fällen mit  $r \geq 3n - 3$  ausgedehnt. Von den speziellen Folgerungen sei der Satz erwähnt:  $2F\pi_r(S^2) = 0$ ,  $r \geq 3$ , wobei  $F$  die Einhängung bezeichnet.

*H. Hopf.*

**Hopf, Heinz:** Die  $n$ -dimensionalen Sphären und projektiven Räume in der Topologie. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 193—202 (1952).

Dieser „nicht für Topologen bestimmte“ Vortrag gibt eine Auswahl von Problemen der modernen Topologie.

*E. Pannwitz.*

**Stoilow, Simon:** Sur les transformations intérieures des variétés à trois dimensions. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 263—266, ungarische und russische Zusammenfassg. 266 (1952).

Eine Abbildung  $f$  einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X$  auf eine ebensolche,  $Y$ , ist eine innere Abbildung, wenn  $f$  stetig und offen ist und  $f^{-1}(y)$  für jeden Punkt  $y$  von  $Y$  nulldimensional ist. Unter Bezugnahme auf einen Satz von R. L. Wilder (vgl. dies. Zbl. 8, 87), wird gezeigt, daß die Menge der Punkte von  $X$ , wo  $f$  nicht lokal-topologisch ist, von einer Dimension  $\leq 1$  ist.

*G. Aumann.*

**Borsuk, K.:** On certain mapping of the 2-sphere onto itself. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 268—272 (1952).

$S$  und  $E$  bezeichnen die Kugelfläche bzw. die Ebene. Es wird eine Abbildung  $f: S \rightarrow S$  angegeben, die unwesentlich ist, sich aber nicht als Zusammensetzung  $f = \varphi \varphi$ ,  $\varphi: S \rightarrow E$ ,  $\varphi: E \rightarrow S$ , darstellen läßt.

*H. Hopf.*

**Pannwitz, Erika:** Eine freie Abbildung der  $n$ -dimensionalen Sphäre in die Ebene. Math. Nachr. 7, 183—185 (1952).

Eine Abbildung  $\varphi$  eines Raumes  $X$  in einen Raum  $Y$  heißt „frei“, wenn es eine Abbildung  $f: X \rightarrow X$  mit  $\varphi f(p) \neq p$  für jeden  $p \in X$  gibt (alle Abbildungen sind eindeutig und stetig). In Beantwortung einer vom Ref. formulierten Frage (vgl. dies. Zbl. 15, 276) wird in der vorliegenden Arbeit durch explizite Konstruktion gezeigt, daß es für jedes  $n$  eine freie Abbildung der  $n$ -dimensionalen Sphäre in die (2-dimensionale) Ebene gibt. Dabei ist die zugehörige Abbildung  $f$  sogar topologisch.

*H. Hopf.*

**Koseki, Ken'iti:** Über die Abbildungen von mehrdimensionalen einfach-zusammenhängenden Gebieten auf Kugeln und ihre Begrenzungen. I. Japanese J. Math. 22, 87—100 (1952).

L'A. démontre un théorème concernant l'existence d'homéomorphismes. Notations:  $T: G \rightarrow B$  est une homéomorphie d'un ouvert relativement compact  $G$  de  $R_3$  sur la boule  $B: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ ;  $F, S^2$  sont les frontières de  $G, B$  respectivement;  $\bar{T}$  est l'application multivoque qu'induit  $T$  sur  $F$ . Hypothèses:  $R^3 - (G \cup F)$  est connexe; tout point de  $F$  est accessible de  $G$ ; si  $a, b$  sont des points distincts de  $F$ , alors  $\bar{T}(a) \cap \bar{T}(b) = \emptyset$ . Théorème: Il existe une homéomorphie  $U: (G \cup F) \rightarrow (B \cup S^2)$ . Grâce à une caractérisation de  $S^2$  due à L. R. Moore l'A. montre d'abord



que  $F$  est homéomorphe à une sphère. Cela étant, il construit un automorphisme de  $B$ , qui lui permet d'obtenir  $U$ .  
*St. R. Fary.*

**Bing, R. H.:** A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres. *Ann. of Math.*, II. Ser. **56**, 354—362 (1952).

Es sei  $M$  eine gehörnte Sphäre von J. W. Alexander,  $U$  ihr nicht einfach zusammenhängendes Inneres. Verf. zeigt, daß der Raum, der aus zwei kongruenten Exemplaren von  $M \cup U$  durch Identifizieren entsprechender Punkte von  $M$  entsteht, topologisch eine  $S^3$  ist. Es existieren also Transformationen der  $S^3$  von der Periode zwei, die nicht zu einer Bewegung äquivalent sind. Ferner ergibt sich eine Cantorsche Menge in  $S^3$ , deren Komplement nicht einfach zusammenhängend ist, für welche aber (im Gegensatz zum Beispiel von Antoine) je zwei Punkte durch eine zahn eingebettete 2-Sphäre getrennt werden können. Diese 2-Sphären können nicht beliebig klein gewählt werden, ihr Durchmesser besitzt eine positive untere Schranke.  
*Horst Schubert.*

**Chen, K. T.:** Commutator calculus and link invariants. *Proc. Amer. math. Soc.* **3**, 44—55 (1952).

Für eine Gruppe  $G = G_1$  bezeichne  $G_d$  die  $d$ -te Kommutatorgruppe ( $G_d = [G_{d-1}, G]$ ). Sei  $G$  durch  $n + k$  Erzeugende und  $k + q$  Relationen dargestellt, und es besitze die abelsch gemachte Gruppe  $G/G_2$  eine Basis von  $n$  Elementen. Zu jedem  $d \geq 3$  konstruiert Verf. eine Gruppe  $\mathcal{G}$  derart, daß  $\mathcal{G}$  durch  $n$  Erzeugende und  $q$  Relationen dargestellt wird und daß  $\mathcal{G}/\mathcal{G}_d \cong G/G_d$ . Dieses Resultat wird auf Gruppen angewandt, die zu polygonalen Verkettungen gehören. Für solche  $G$  ist  $G_2/G_3$  durch die Verschlingungszahlen bestimmt, und es ergeben  $G_d/G_{d+1}$  für  $d \geq 3$  weitere numerische Invarianten.  
*Horst Schubert.*

**Chen, Kuo-Tsai:** Isotopy invariante of links. *Ann. of Math.*, II. Ser. **56**, 343—353 (1952).

Verf. zeigt: Zu einer (möglicherweise wilden) Verkettung  $L$  im euklidischen Raum  $E^3$  und jedem  $d \geq 1$  gibt es eine Gruppe  $H_d$  und ein  $\delta > 0$  derart, daß für alle polygonalen  $\delta$ -Approximationen  $L'$  der Verkettung gilt:  $G(L')/G_d(L') \cong H_d$  (siehe vorstehendes Referat). Diese Gruppen sind invariant gegen Isotopien der Verkettung (die nicht Deformationen des Raumes zu sein brauchen). Es bleibt offen, ob  $G(L)/G_d(L) \cong H_d$ , und daher auch, ob  $H_d$  von der affinen Struktur von  $E^3$  abhängt.  
*Horst Schubert.*

**Errera, Alfred:** Sur les polyèdres de genre zéro. *Rend. Mat. e Appl.* **11**, 315—322 (1952).

Es handelt sich um die Klassifikation der möglichen (bestimmte Bedingungen erfüllenden) Gebietseinteilungen der Kugelfläche (der „Polyeder“). Methode und Bezeichnungen siehe dies. Zbl. **47**, 169. Durch einen Whitney-Zyklus wird das Kantennetz in zwei Bäume (dritten Grades) zerlegt, die als „gerade“ angenommen werden, d. h. von jedem Knotenpunkt geht mindestens eine und von zwei Punkten gehen je zwei Endkanten aus. Nach den Zuordnungsmöglichkeiten dieser letzteren vier Endkanten jedes Baumes zu Endkanten des anderen Baumes erhält man 12 Klassen mit im ganzen 27 Varianten, in die sich die Polyeder einordnen lassen. Da die Führung des Whitney-Zyklus eines gegebenen Polyeders auf verschiedene Weise möglich ist, ist er der niedrigst möglichen Klasse zuzuordnen. Die einzelnen Polyeder derselben Klasse unterscheiden sich noch hinsichtlich der Zuordnung der übrigen Endkanten.  
*H. Künneth.*

**Dirac, G. A.:** Connectivity theorems for graphs. *Quart. J. Math.*, Oxford II. Ser. **3**, 171—174 (1952).

Nach einem Satze von Menger können bekanntlich zwei Knotenpunkt Mengen  $S_1, S_2$  eines Graphen dann und nur dann durch  $d$  knotenpunktfremde Wege verbunden werden, falls nicht  $d - 1$  Knotenpunkte derart bestimmbar sind, daß ein jeder  $S_1$  und  $S_2$  verbindende Weg wenigstens einen dieser Knotenpunkte enthält. Es wird bewiesen, daß im Falle  $d = 2$ , wenn ein verbindender Weg  $W$  vorgegeben ist, von den zwei Wegen auch gefordert werden kann, daß ihre mit  $W$  gemeinsamen Knotenpunkte von  $S_1$  nach  $S_2$  laufend in derselben Reihenfolge stehen, wie auf  $W$  selbst. Im Falle  $d > 2$  trifft das Entsprechende nicht mehr zu.  
*G. Hajós.*

## Angewandte Geometrie:

● **Delachet, André et Jean Moreau:** *La géométrie descriptive et ses applications.* (Que sais-je No. 521.) Paris: Presses Universitaires de France 1952. 120 p.

● **Grant, Hiram E.:** *Practical descriptive geometry.* London: McGraw-Hill Book Co. 1952. 339 fig., 254 p. bound 32 s.

● **Bartel, Kazimierz:** *Kotierte Projektion.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1952. 90 S. zł. 6,15 [Polnisch].

**Baidaff, Bernardo I.:** *Das kartographische Problem, aber nicht in der Ebene.* Bol. mat. 25, 28—30 (1952) [Spanisch].

Es handelt sich um eine räumliche Verallgemeinerung der sog. Pothenotschen Aufgabe. H. Pietsch.

**Gáti, József:** *La sphère de validité du théorème de Legendre de la trigonométrie sphérique dans le cas de dimensions terrestres.* Publ. Inst. Math. appl. Acad. Sci. Hongrie 1, 301—309 u. russ. u. français. Zusammenfassg. 309—310, 310 (1952) [Ungarisch].

L'article s'occupe de l'établissement de la sphère de validité du théorème de Legendre. Après le théorème de Legendre si l'on néglige la quatrième puissance et les puissances plus hautes que la quatrième des côtés — on a  $\alpha - \alpha' \approx e/3$ ,  $\beta - \beta' \approx e/3$ ,  $\gamma - \gamma' \approx e/3$ . Ici,  $\alpha, \beta, \gamma$  signifient les angles d'un triangle sphérique, mesurés en radians, les côtés du triangle sphérique sont  $a, b, c$ , et son aire est  $t$ , lequel, si nous prenons le rayon de la sphère (dans le cas de la terre le rayon du globe), comme l'unité, est égal à l'excès sphérique  $e$  du triangle sphérique, tandis que  $\alpha', \beta', \gamma'$  signifient les angles du triangle plan dessiné avec les côtés  $a, b, c$  et  $t'$  signifie l'aire de ce triangle. Il faut établir la grandeur que le côté le plus grand du triangle ne doit pas dépasser pour assurer que la faute donnée par l'approximation de Legendre reste au-dessous de la faute de la mesure angulaire  $\varepsilon$ . Pour ce but il fallait trouver le maximum de l'expression

$$H = |(b^2 + c^2 + 2a^2)/180| t'$$

avec les inégalités  $a \leq d$ ,  $b \leq d$ ,  $c \leq d$  comme conditions subsidiaires. La fonction  $\alpha(\varepsilon)$  obtenue comme résultat est représentée sur papier logarithmique par une ligne droite. Par exemple si la mesure des angles est d'une exactitude de  $0,1''$ , l'application du théorème de Legendre sur les longueurs de côté ne dépassant pas  $7^\circ$  (780 km) donnera une déviation plus petite que la faute de la mesure des angles. Zusammenfassg. des Autors.

**Zagrebin, D. V.:** *Die Theorie des regularisierten Geoids.* Trudy Inst. teoret. Astr. 1, 87—224 (1952) [Russisch].

Vgl. die inzwischen erschienene deutsche Übersetzung: Veröff. geodät. Inst. Potsdam Nr. 9, 129 S. (1956).

## Theoretische Physik.

● **Huntley, H. E.:** *Dimensional analysis.* London: Macdonald and Co. (Publishers), Ltd. 1952. 158 p. 20 s. net.

**Popovici, A.:** *Les bases expérimentelles et théoriques de la théorie des constantes physiques.* Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser., Știi. Natur. 1, Nr. 1, 77—97 u. russ. u. français. Zusammenfassg. 97—98 (1952) [Rumänisch].

This paper is a review of the author's previously published „Theory of Physical constants“ [Acad. Republ. popul. Române, Bul. ști., Sect. Ști. mat. fiz. 3, 417—426 (1951), cf. also „La physique d'action“, Bul. Inst. Politehn. Iași, 1948] in which the fundamental physical constants are treated formally from a group-theoretical standpoint. The paper abounds in quotations and references to materialist-dialectic philosophy and contains some references to experimental results, the connection of which with the subject matter is not quite clear. M. E. Mayer.

**Pi Calleja, Pedro:** *Über Regularität und Konventionalismus beim Begriff der physikalischen Größe.* Math. Notae 12—13, 19—31 (1952) [Spanisch].

**Mechanik:**

● **Geronimus, Ja. L.:** Skizzen über die Arbeiten russischer Koriphäen der Mechanik. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 520 S. 22 R. 75 K. [Russisch].

In zwölf Skizzen werden die Arbeiten zur Mechanik der folgenden russischen Forscher behandelt: M. V. Ostrogradskij, O. I. Somov, P. L. Čebyšev, I. A. Vyšnegradskij, V. G. Imšeneckij, S. V. Kovalevskaja, N. E. Žukovskij, S. A. Čaplygin, A. M. Ljapunov, V. A. Steklov, I. V. Meščerskij, A. N. Krylov. Deutsche Übersetzungen der einzelnen Skizzen sind 1954 erschienen; sie werden in diesem Zbl. 55, 244; 58, 82, 83, 177, 193) einzeln angezeigt.

**Gallissot, François:** Transformations infinitésimales et intégration des équations différentielles de la mécanique. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1599—1600 (1952).

● **Deimel, Richard F.:** Mechanics of the gyroscope. The dynamics of rotation. New York: Dover Publications, Inc. 1952. IX, 192 p. \$ 1,60.

**Colombo, Giuseppe:** Osservazioni sulla stabilità dei moti merostatici di un giroscopio ed applicazioni ad una caso notevole. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 59—77 (1951)

L'A. considera un solido a struttura giroscopica, fissato in un punto 0 del suo asse, e calcola, anzitutto, il momento rispetto a 0 delle forze agenti tali da produrre, nel solido stesso, moti merostatici cioè di precessione o di rotazione. Determina poi alcune condizioni per la stabilità o la stabilità ridotta dei predetti moti. Applica infine questi risultati al caso in cui sul corpo agiscano forze con potenza nulla e dopo aver provato che i moti merostatici sono, in generale, instabili, ne discute la loro stabilità ridotta rispetto a l'angolo di nutazione. *D. Graffi.*

**Colombo, G.:** Osservazioni ad aggiunto ad una nota precedente. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 219—223 (1951).

Generalizzando risultati di una nota precedente, l'A. espone un criterio per la stabilità ridotta (rispetto alle coordinate non ignorate) dei moti merostatici in un sistema a coordinate ignorabili, e un criterio per l'instabilità dei predetti moti, valido quando le coordinate ignorabili si riducono ad uno sola. Osserva poi come tale criteri si possano applicare al moto di un solido con punto fisso nel caso in cui solo l'angolo di nutazione sia coordinata non ignorabile. *D. Graffi.*

\***Sokolov, Ju. D.:** Über die Bewegung eines Systems dreier Massenpunkte auf einer Geraden. Ukraïn. mat. Žurn. 1, Nr. 3, 3—40 (1949) [Russisch].

**Moiseev, N. N.:** Die Bewegung eines starren Körpers, der einen, teilweise mit einer idealen tropfbaren Flüssigkeit erfüllten, Hohlraum besitzt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 719—722 (1952) [Russisch].

Einige Resultate von N. E. Joukowski verallgemeinernd, leitet der Verf. die Bewegungsgleichungen des Systems Gefäß-Flüssigkeit ab, die für kleine Bewegungen um die Gleichgewichtslage und für eine freie Flüssigkeitsoberfläche im Hohlraum gelten. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Spannungsvektor der Massenkraft richtungsunveränderlich bleibt und seine Größe allein von der Zeit abhängig ist, daß also in der Gleichgewichtslage die freie Oberfläche der Flüssigkeit eben ist. Die äußeren eingepprägten Kräfte, die auf das Gefäß einwirken, werden so angenommen, daß die in der Flüssigkeit entstandenen Wellen kleine Amplituden besitzen. Als Beispiel behandelt der Verf. ebene Schwingungen eines offenen quaderförmigen Gefäßes unter der Einwirkung einer linearen elastischen Kraft. *T. P. Angelitch.*

**Cicco, John de:** Conservative physical systems of curves upon a surface. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 9, 23—36 (1952).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (dies. Zbl. 35, 393) geht Verf. aus von einem Kraftfeld in einer Fläche  $\Sigma$  und untersucht die Bahnkurven  $S_k$ , längs deren sich ein Massenpunkt so bewegen kann, daß die Druckkraft  $P$  gleich dem  $k$ -fachen der Normalkomponente der Feldkraft ist ( $k = \text{konst.}$ ). Hat das Kraftfeld ein Potential, so



besteht das System  $S_k$  aus  $\infty^1$  zweiparametrischen „natürlichen Familien“ mit je konstanter Energie  $E_0$ . Jede solche Familie kann konform in die geodätischen Linien einer Fläche  $\bar{\Sigma}$  abgebildet werden und läßt sich durch Berührungstransformationen erzeugen. — Die Hamiltonschen Gleichungen für das konservative System  $S_k$  werden aufgestellt; schließlich wird der Fall  $k = \infty$  behandelt. *W. Haack.*

• Sen, D. K. and V. B. Kamath: Statics and dynamics. Bombay: The School and College Bookstall 1952, VI, 325 p. Rs. 4/8.

Pailloux, Henri: Statique et dynamique des membranes rigides. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1430—1432 (1952).

Pour l'étude des questions de statique ou de dynamique relatives aux coques (membranes minces rigides), l'auteur evalue le potentiel de forme dans un système de coordonnées curvilignes en partant de la surface moyenne considérée fixe. Un point de la coque est défini par sa projection normale sur la surface moyenne et par sa distance à cette surface. On trouve le potentiel de forme à l'aide de la dérivée covariante, en partant de la métrique écrite dans le système de ci-dessus et ensuite on écrit les équations de Lagrange du mouvement. On aboutit à un système de six équations aux dérivées partielles par rapport à six fonctions inconnues. On mentionne le cas des vibrations sans charge. *M. Haimovici.*

Cahen, Gilbert: Perturbations des oscillateurs filtrés. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1614—1616 (1952).

Buckens, F.: Sur une propriété de similitude des configurations moyennes de mobiles indéformables. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 66, 61—69 (1952).

Mit  $z_m = \int_0^T z \cdot p(t) dt$  sei die „belastete mittlere Lage“ in dem Zeitintervall  $(0, T)$  eines Punktes einer ebenen Bewegung bezüglich der festen Ebene definiert. Hierin ist  $z$  der Ortsvektor des Punktes in komplexer Darstellung und  $p(t)$  eine gegebene zeitabhängige Belastungsfunktion. — Es wird für  $p = 1/T$  und  $p_n = T^{-1} e^{-i2\pi nt/T}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) die Konfiguration  $(z_{1m}, z_{2m}, \dots)$ , die der Folge  $(z_1, z_2, \dots)$  entspricht, näher untersucht. Die Methode wird auf die Koppelbewegung eines zentrischen Geradeschubkurbelgetriebes angewendet. Andere Möglichkeiten bei der Mittelbildung für verschiedene Belastungsfunktionen werden diskutiert. *B. Dizioğlu.*

Föppl, O.: Einfachster synthetischer Aufbau der Schwingungsbewegung eines Massenpunktes  $m$ . Z. angew. Math. Mech. 32, 251—255 (1952).

• Haag, Jules: Les mouvements vibratoires I. (Collection Euclide). Paris: Presses Universitaires de France. 1952, 268 p. 1540 Fr.

Dieser erste Band des als zweibändig geplanten Werks beschränkt sich auf Schwingungen von einem Freiheitsgrad. Nur kurz wird die Kinematik der Schwingungen und die Kinetik linearer Schwingungen behandelt, so daß der Schwerpunkt der Darstellung bei den nichtlinearen Schwingungen liegt. Dabei wird hauptsächlich die vom Verf. entwickelte Theorie der Synchronisation besprochen. Auf Beweise wird vollständig verzichtet, so daß eine Prüfung der Methoden nur an Hand der zahlreichen Arbeiten des Verf. (besonders dies. Zbl. 33, 84, 218; 34, 351, 404; 39, 197; 40, 194; 43, 311) möglich ist. Es ist zu begrüßen, daß die Untersuchungen des Verf. systematisch zusammengefaßt sind, so daß diese Methode auch für den Praktiker zugänglich gemacht ist, wenn er sich an manchen Stellen auf rezeptartige Hinweise beschränken will. Inhalt: 1. Sinusförmige Bewegungen. Darstellung der kinematischen Grundbegriffe. (Die Extrema der gedämpften Schwingung liegen nicht auf der Leitlinie! S. 20). 2. Lissajous'sche Bewegungen, Fourierzerlegung. 3. Der lineare Schwinger. 4. Erzwungene lineare Schwingungen. 5. Störungen eines linearen Schwingers. Behandlung von (1)  $x'' + \omega^2 x = \lambda f(x, x', t)$  mit der Methode von Krylov-Bogoljubov. 6. Die strenge Theorie der Synchronisation. Es erweist sich als zweckmäßig, die Theorie sogleich für  $n$  Freiheitsgrade darzustellen: (2)  $dx_i/dt = \lambda f_i(x, t)$ . Die  $f_i$  haben fast überall stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung, es sind die  $f_i$  in  $t \bmod T$  periodisch,  $\lambda$  sei hinreichend klein. Es sei  $F_i(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f_i(x, t) dt$ . Die Gleichgewichtslagen von (3)  $\frac{dx_i}{dt} = \lambda F_i(x)$ , die sich aus den „Synchroni-

sationsgleichungen“  $F_i(x) = 0$  ergeben, werden wie üblich mit Hilfe der Variationsgleichungen diskutiert. Sind sie stabil, so streben die Lösungen von (2) gegen periodische Lösungen, die sich um  $O(\lambda)$  von den Gleichgewichtslagen von (3) unterscheiden (Beweis fehlt). Es wird ein Verfahren angegeben, wie diese Lösungen aus der Ausgangsgleichung (1) erhalten werden. 7. Harmonische Synchronisation. Spezialisierung für den Fall, daß die rechte Seite von (1) die Gestalt  $\lambda(f_1(t) + f_2(x, x'))$  hat. 8. Subharmonische Synchronisation.  $f_2$  hängt nur von einer der beiden Veränderlichen ab. 9. Nichtlineare Schwingen.  $x'' = f(x, x')$  wird in der Phasenebene diskutiert. 10. Beispiele. W. Haacke.

● Whittaker, E. T.: A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies. 4<sup>th</sup> ed. Cambridge: At the University Press 1952.

Venkatesan, N. S.: A note on the relation between maximum pressure and shot-start-pressure. Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 265—271 (1952).

Neglecting the covolume correction and taking the propellant to the tubular, the equations of the interior ballistics of a conventional gun are integrated and an explicit relation between the maximum pressure and the shot-start-pressure is derived. The variation of maximum pressure with shot-start-pressure and the central ballistic parameter is illustrated by a table of numerical values derived from the above solution. Zusammenfassung des Autors.

Bader, W.: Über den Parametereinfluß auf einfache nichtstationäre Bewegungen. Z. angew. Math. Mech. 32, 297—305 (1952).

Der Verf., der schon durch andere Arbeiten auf dem Gebiete der Stabilität von Flugbewegungen bekannt ist, befaßt sich in der vorliegenden Arbeit mit der Untersuchung einer beliebigen gestörten Bewegung eines Flugkörpers im Raum unter Benutzung der Methode der kleinen Schwingungen. Er stellt die Gleichungen für diese Bewegung unter Verwendung von Matrizen auf und berücksichtigt dabei auch die Möglichkeit von Steuerausschlägen, die Funktionen der Abweichungen von der ungestörten Bewegung sind. Da das entstehende umfangreiche Gleichungssystem sich auf praktische Fälle nur mit großen Schwierigkeiten anwenden läßt, betrachtet der Verf. einige Sonderfälle, bei denen er den Einfluß von Anfangsstörungen unter Benutzung der Laplace-Transformation erfaßt. G. Bock.

### Elastizität. Plastizität:

● Gehler, Willy und Wolfgang Herberg: Festigkeitslehre. I: Elastizität, Plastizität und Festigkeit der Baustoffe und Bauteile. (Sammlung Götschen Bd. 1144.) Durchgesehener u. erweiterter Neudruck. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1952. 158 S. 118 Bilder. DM 2,40.

● Langendonck, Telemaco van: Orthogonalfunktionen bei der Lösung von Problemen der Elastizitätstheorie. Bd. I: Allgemeines. Torsion. Sao Paulo: Associação Brasileira de Cimento Portland 1952. VIII, 69 S. [Portugiesisch].

Gorgidze, A. Ja.: Dehnung und Biegung natürlich tordierter zusammengesetzter Balken durch ein Kräftepaar. Soobsčeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 13, 73—80 (1952) [Russisch].

The general solution of torsional and flexure problems for prismatical compound beam made up of different materials is known („Muskelishvili's problem“). In this paper, based on the above results, the author gives an approximative solution for tension and flexure problems of composite bars, natural twisted in the cases when the external force, or bending couple, acts in the end  $z = l$  of the beam. It is assumed that the beam is composed of materials with different Young's moduli but with like Poisson's ratios ( $\sigma$ ), forming a set of parallel thin layerbars not in contact and surrounded by elastic medium ( $S_0$ ). The cross section of the beam in the undeformed state ( $S$ ) consists of regions ( $\bar{S}_i$ ) bounded by simple closed contours ( $L_i$ ) represented by equations  $f(x - k y z, y + k x z) = f(\xi, \eta) = 0$ , assuming that the section slope is given by equation  $\theta(z) = k z$ , where  $k$  is a small parameter. The Muskelishvili's problem is then: prescribe the stress components satisfying the homogeneous equilibrium equations, linear Hooke's law and boundary conditions on free lateral surface. The basic elastostatic equations are given and the stress components determined in function of  $\varphi(\xi, \eta)$ -torsion function, or  $\psi(\xi, \eta)$ -flexure function, which satisfy the relation  $\Delta \psi = 2(1 + \sigma) \eta$ . The explanation is not very clear and persuasible.

D. Rašković.

**Ruchadze, A. K.:** Das Problem der Dehnung von natürlich tordierter, aus verschiedenen elastischen Materialien bestehenden, prismatischen Balken durch eine Kraft. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 13, 137—144 (1952) [Russisch].

The problem considered is a special case of the „general Muskelishvili's problem“. An approximate solution is given for a composite bar natural twisted in the case when the external force acting at the end  $z = l$  is statically equivalent to a tensile force which acts in the generalized centre of inertia of the same section in direction parallel to the axis  $O, \xi$ . The same suppositions are made as in the Gorgidze's paper (see preceding review) and the method is used. One example is given illustrating application of theory to the case of two different materials only, when the contours  $L_j$  are the concentric circles. The region  $S_1$  is the circle surrounded by the periphery  $L_1$ , but  $S_0$  is the annulus between the circles  $L_j$ . Author's paper was presented by academician B. D. Kupradze.

*D. Rašković.*

**Ruchadze, A. K.:** Das Problem der Verbiegung von durch ein Kräftepaar natürlich tordierten, aus verschiedenen elastischen Materialien bestehenden, prismatischen Balken. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 13, 265—272 (1952) [Russisch].

The same problem is solved as in previous treatment (cf. the preceding review) in the case when the forces acting at the end  $z = l$  are statically equivalent to a bending couple whose moment acts in the generalized centre of inertia of the same section on direction parallel to the axis  $O, y$ . It is shown that if conditions in the end  $z = l$  must be satisfied it is necessary to add to the obtained conditions the solutions of the flexure problem with the transversale force and bending couple. The constant  $\tau$  which enters in the solution can be determined supposing that the torsional moment is zero. The like example is discussed here also. *D. Rašković.*

**Sarangija, A. F.:** Zur Frage der Verbiegung eines durch ein Kräftepaar tordierten, aus verschiedenen Materialien zusammengesetzten Balkens. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 13, 389—396 (1952) [Russisch].

Contrary to the Gorgidze's problem (cf. two reviews above) in this paper it is assumed that the beam is composed of materials with different Young's moduli and different Poisson's ratios; the other suppositions are the same. In this case the components of the displacement are also continuous on the border surfaces of the different materials. After the deformation on the free end it is  $z - w = l$ . Author shows that is necessary to the obtained solution to add and a solution of some linear S. Venant's problem. One example, as in Ruchadze's paper (cf. the preceding reviews) is discussed here too. *D. Rašković.*

**Parkes, E. W.:** The stress distribution near a loading point in a uniform flanged beam. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 244, 417—467 (1952).

The usual method, by which the stresses in a uniform flanged beam subjected to a transverse loading are determined, leads to certain incompatibilities of displacement and stress distribution near the section of the beam, at which the load is applied. The paper endeavours to remove these difficiencies. The first part considers the case of a beam loaded by means of a patch plate attached to the web. In the second, the load is applied to the flanges. The boom is treated as a beam obeying the simple engineer's theory stresses and the web as a flat rectangular plate obeying the general elasticity equations for plane stress. Simple approximate formulae are found for the maximum stress concentration, which occur at the loading section. Numerical examples are treated as applications and results of strain-gauge tests are presented which show good agreement between predicted and experimental results. Comparison is given with other recent works on the same subject. *M. Haimovici.*

**Nowiński, J.:** Some problems of the theory of thin-walled tubes. Arch. Mech. stosow. 4, 123—163 u. engl. Zusammenfassg. 163 (1952) [Polnisch].

A brief review of some of the author's previous work on the theory of thin-walled tubes



with rigid diaphragms is given. The main part of the paper deals with a general theory of conical cantilever beams under condition that buckling does not occur. An analysis of displacements is made in order to find the stresses as functions of three translation components and one rotational component. These functions are determined from the equation of equilibrium, additional conditions of dynamic and geometric nature taken into account. Self-equilibrating stress systems are introduced in order to determine the influence of taper, end-constraint and load variation along the span of the beam. It is shown that the stress distribution can be expressed as the sum of the engineers' theory stresses and self-equilibrating load systems. Pure torsion with variable torque as well as flexion are considered. General formulae for flexion combined with torsion are given. Relations between the position of center of shear and center of twist are discussed.

Autoreferat.

**Wuest, W.:** Der Einfluß der Querschnittsform auf das Verhalten von Bourdonfedern. Ingenieur-Arch. **20**, 116—125 (1952).

Verf. untersucht die Kenngrößen der Bourdonfedern im Falle eines doppelt-symmetrischen Querschnittes mit kleinem Achsenverhältnis  $\alpha = b/a$  der Mittel- fläche (als Achsenlängen werden die des umschriebenen Rechtecks bezeichnet). Es sei  $y = \pm b f(x)$  die Gleichung der Mittelfläche des Querschnitts. Es wird die Grund- gleichung dargestellt und integriert. Die wichtigen Kenngrößen der Feder (Druck- empfindlichkeit, Steifigkeit, größte Biegespannung und Überdrucksicherheit) lassen sich auf vier Funktionen zurückführen, die von der Querschnittsform und vom Para- meter  $\lambda = a^2/sr$  ( $a$  große Halbachse,  $s$  Wandstärke,  $r$  Krümmungsradius) abhängen. Es werden die Fälle durchgerechnet, wo  $f(x)$  eine Konstante, ein gerades Polynom zweiten, dann vierten, dann sechsten Grades ist. Die für eine Näherungsellipse ge- fundenen Resultate stimmen befriedigend mit den Meßergebnissen überein. Im ganzen zeigt sich ein erheblicher Einfluß der Querschnittsform. *M. Haimovici.*

**Prokopov, V. K.:** Über ein ebenes Problem der Elastizitätstheorie für ein recht- eckiges Gebiet. Priklad. Mat. Mech. **16**, 45—56 (1952) [Russisch].

La méthode de P. F. Papkovic (ce Zbl. **23**, 127) et de A. I. Lurie [Priklad. Mat. Mech. **6**, 151—168 (1942)] est étendue au problème plan pour un rectangle dont les cotés transversaux ne se déplacent pas normalement. L'A. trouve des solu- tions explicites du problème; ensuite il examine le cas où le rectangle est mince et obtient les formules connues de la théorie élémentaire du flambage des poutres.

*M. Haimovici.*

**Šerman, D. I.:** Über die Spannungen in einer belasteten Halbebene, die durch zwei kreisförmige Öffnungen geschwächt ist. Priklad. Mat. Mech. **15**, 297—316 (1951) [Russisch].

The author considers the elastic, isotropic, homogeneous semiplane having two circular holes (with the contours  $L_j$  and the radii  $R_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $R_1 > R_2$ ) distant enough from the limits on the semi-plane ( $L_0$ ) supposing that the elastic medium is subjected to the weight and to the tensions  $X_x^\infty$  and  $Y_y^\infty$  in infinity. The stress components  $X_x, X_y, Y_z$  are determined by means of Kolossov-Mushelishvili's potentials—the functions  $\varphi_1(z), \psi_1(z)$  of the complex variable. These functions are regular in the region  $S$  (the infinite region bounded by contours  $L_j$ ) and have the value zero in the infinity. Each of these functions can be represented in form of the sum of two functions, one of which is regular on  $L_1$  and other on  $L_2$ . In the neigh- bourhood of the point  $z = a_2 + R_2$ , where  $a_2 = x_2$  is the coordinate of the centre of  $L_2$ , there is the more abundant concentration of the stresses than in the neighbour- hood of the point  $z = a_2 - R_2$ . Numerical examples are treated. By means of the analysis of the obtained functions, formulas and numerical tables one observes that the calculated results of the stresses are only 3—5% as great as the exact value what is very important for numerical evaluation in engineering practice.

*D. Rašković.*

**Ohasi, Yosio:** Bending of a thin elliptic plate of an orthotropic material under uniform lateral load. Z. angew. Math. Phys. **3**, 212—224 (1952).

Etude d'une plaque elliptique d'épaisseur constante uniformément chargée. Le

matériel est anisotrope à deux axes de symétrie élastique, qui font avec les axes de l'ellipse un angle  $\theta$ . On considère le cas où la plaque est encastrée et celui où elle est appuyée sur son contour. Le premier est plus simple et on en déduit la solution exacte, qu'on étudie numériquement pour une plaque en chêne coupé parallèlement à la fibre du bois pour les valeurs de  $\theta$ :  $0, \pi/4, \pi/2$ . Le second cas est plus compliqué; on indique une méthode de calcul de la solution et on calcule la solution approchée pour le même cas de la plaque en chêne dans le cas  $\theta = \pi/4$ . Les cas  $\theta = 0, \theta = \pi/2$  peuvent être traités de la même manière.

M. Haimovici.

Lisowski, A.: Die Stabilität von Rotationsschalen. Arch. Mech. stosow. 4, 1—21 u. russ. Zusammenfsg. 21—22 (1952) [Polnisch].

Es wird die Stabilität von ebenen sphärischen Schalen untersucht. Zur Vermeidung mathematischer Schwierigkeiten wird die Differenzenmethode benutzt.

Aus der russ. Zusammenfsg.

Ambarcumjan, S. A.: Temperaturspannungen in Sandwich-Schalen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, fiz.-mat. estest. techn. Nauki 5, Nr. 6, 1—16 u. armen. Zusammenfsg. 16 (1952) [Russisch].

A thin sandwich-shell, with an odd number of elastic orthotropic layers disposed symmetrically with respect to the middle surface, is considered under usual assumptions that the layers do not slip one along the other and that straight linear elements normal to the middle surface remain straight and normal to the new middle surface during the deformation. The relations between the stress resultants and corresponding strains are derived in case that in all points the planes of elastic symmetry of a layer coincide with principal directions of curvature of the middle surface, and that the temperature (otherwise arbitrary function of coordinates) varies linearly along the normal to the middle surface. These relations together with the equations of equilibrium and compatibility conditions represent a complete system of equations solving the problem. The axisymmetrical case of a shell of revolution and the case of a very flat shell are considered in more detail. Obviously, the obtained differential equations have in principle the same structure as in the case of a homogeneous isotropic shell.

D. Radenković.

Ionescu-Cazimir, Viorica: Sur les équations de l'équilibre thermo-élastique plan. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Știi. Natur. 1, Nr. 1, 55—57 u. russ. u. französ. Zusammenfsg. 57 (1952) [Rumänisch].

En exprimant les tensions par la fonction d'Airy  $\Omega$ :  $\sigma_x = \partial^2 \Omega / \partial y^2$ ,  $\sigma_y = \partial^2 \Omega / \partial x^2$ ,  $\tau = -\partial^2 \Omega / \partial x \partial y$  on trouve que cette fonction satisfait à l'équation aux dérivées partielles  $\Delta^2 (\Delta - \nu \partial / \partial t) \Omega = 0$ .

Autoreferat.

Cristea, M.: Sur les petits mouvements thermo-élastiques. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Știi. Natur. 1, Nr. 1, 72—76 u. russ. und französ. Zusammenfsg. 76 (1952) [Rumänisch].

Le but de la note est l'exemplification d'une méthode donnée par Gr. C. Moisil en (Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale, Bucurest 1950) pour le problème dynamique de la thermo-élasticité.

Autoreferat.

Peters, Werner: Erweiterung der Hertzschen Theorie über die Berührung fester, elastischer Körper auf tiefe Kugeleindrücke. Diss. math.-naturw. Fakultät Münster 2, 15—17 (1952).

Panferov, V. M.: Eine allgemeine Methode von A. A. Il'jušin zur Lösung von Randwertproblemen in der Theorie der elasto-plastischen Deformationen bei einfacher Belastung. Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 1), 41—62 (1952) [Russisch].

On the basis of Hencky-Schmidt's stress-strain relations Il'jušin (Plasticity, Moscow 1948) has formulated differential equations for the displacements in the case of a small plastic deformation (analogous to Lamé's fundamental equations in elasticity); boundary conditions can also be always expressed by means of displacements. These equations are nonlinear and, in the present paper, the author, following the lines of his earlier work, discusses a method of their integration by means of successive approximations („method of elastic solutions“) which is the following: we first solve the equations neglecting the nonlinear terms (with this they are in fact reduced to Lamé's equations for an elastic medium); in the second step the nonlinear terms are evaluated on the ground of the first solution and taken into account as some given external (surface and volume) forces, again the elastic problem is solved and so on. Referring to his solutions of some particular problems (Vestn. Mosc. Univ. 1949, 1951) the author points to a relatively rapid con-

vergence of the method. Now, the main subject of the present article is the following. By means of the above method and on the ground of Somigliana's integrals of Lamé's equations the integro-differential equations of the problem of plastic deformation are written out and the existence and the uniqueness of the solution are proved as well as the convergence of the proposed method of elastic solutions. This is achieved by means of the construction of a system of nonlinear integral equations majorant to the integro differential equations of the problem, which system can be proved to possess unique solutions. The proof is valid for infinite as well as for finite regions. The author mentions also his earlier stated theorem that in the case of the infinite region, the number and the extension of plastic zones are limited. *D. Radenković.*

**Išlinskij, A. Ju.:** Über die Restspannungen bei Torsion. Ukrain. mat. Žurn. 4, 155—167 (1952) [Russisch].

Der Verf. zeigt zuerst, wie auf die bekannte elementare Weise die Bestimmung von Restspannungen in einem unendlichen Stab, dessen Oberfläche spannungsfrei ist, bei Torsion über die Elastizitätsgrenze vor sich geht. Dann stellt er eine andere Aufgabe auf, nämlich die Restdeformationen und -spannungen in einem kreisrunden halbumendlichen Stab, sowie in einem solchen Stab von endlichen Dimensionen, zu bestimmen. Er nimmt dabei an, daß der betrachtete halbumendliche bzw. endliche Stab aus dem unendlichen Stab (der schon über die Elastizitätsgrenze gedreht und dann entlastet ist) durch achsennormale ebene Schnitte gebildet wird, wobei sich diese Schnitte ohne auffallende zusätzliche plastische Deformationen legen lassen. Unter diesen Voraussetzungen leitet er eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Restverschiebungen ab, und sucht ihre Lösungen mit Hilfe von Reihenansätzen in Besselschen Funktionen. Zum Schluß behandelt er ein Beispiel des halbumendlichen Stabes und vergleicht die erhaltenen Resultate mit denen, die man unter gleichen Bedingungen bei unendlichem Stab bekommt. *T. P. Angelitch.*

**Geiringer von Mises, Hilda:** Fundamenti di una teoria matematica della plasticità. Rend. Mat. e Appl. 11, 347—361 (1952).

Verf. gibt eine allgemeine Übersicht über die mathematischen Grundlagen der Plastizitätstheorie und ihre physikalischen Hypothesen. Die Grundgleichungen des dreidimensionalen Problems bestehen aus den Gleichgewichtsbedingungen  $\text{div } \mathfrak{P} = 0$  für den Spannungstensor  $\mathfrak{P}$ , der Fließbedingung  $f(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_z) = 0$ , dem Formänderungsgesetz  $k \dot{\epsilon} = \text{grad } h$ , wo  $\dot{\epsilon}$  der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten,  $h(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_z)$  das elastische Potential,  $k$  eine unbekannte Funktion ist, und der Kontinuitätsgleichung  $\text{div } \dot{s} = 0$  für die Verschiebungsgeschwindigkeiten. An die Funktionen  $f$  und  $h$  sind bei isotropen Stoffen gewisse Symmetrieforderungen zu stellen. Zu den Grundgleichungen treten die Randbedingungen und bei teilweise plastischer Verformung die Übergangsbedingungen. Verf. geht auf die Integration der Grundgleichungen des ebenen Problems näher ein, wobei eine Variablentransformation analog wie in der Theorie der kompressiblen Flüssigkeiten herangezogen wird, um das durch Auftreten der Fließbedingung von vornherein nicht lineare Problem  $\text{div } \mathfrak{P} = 0$ ,  $f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$  zu linearisieren und die Anwendung der Charakteristikentheorie möglich zu machen. Man bringe die Fließbedingung auf die Form  $\sigma_1 = \sigma_1(s)$ ,  $\sigma_2 = \sigma_2(s)$  und wähle  $s$  zusammen mit dem Winkel  $\theta$  zwischen der ersten Hauptspannungsrichtung und der  $x$ -Achse als neue Variable. So gelangt man zu einer einfachen und eleganten Diskussion der Charakteristiken in der Ebene der Spannungen resp. der Formänderungsgeschwindigkeiten. Die Tangentenvektoren dieser Charakteristiken sind bestimmt durch ihre Richtungswinkel  $\alpha$  resp.  $\gamma$  gegen die  $x$ -Achse aus

$$\alpha_1 = \theta + \varphi, \alpha_2 = \theta - \varphi \text{ mit } \text{tg}^2 \varphi = \frac{\partial F / \partial \sigma_1}{\partial F / \partial \sigma_2}, \gamma_1 = \theta + \psi, \gamma_2 = \theta - \psi \text{ mit } \text{tg}^2 \psi = \frac{\partial H / \partial \sigma_1}{\partial H / \partial \sigma_2}.$$

Stimmt das elastische Potential  $H(\sigma_1, \sigma_2)$  mit der Fließfunktion  $F(\sigma_1, \sigma_2)$  überein, so folgt  $\varphi = \psi$  und weiterhin aus  $\partial F / \partial \sigma_1 + \partial F / \partial \sigma_2 = 0$  folgt  $\varphi = \pi/4 = \psi$ . Im hyperbolischen Fall lassen sich die Differentialgleichungen der Charakteristiken in der Spannungsebene sofort integrieren. Für die Komponenten der Verschiebungsgeschwindigkeit tangential und normal zu den Charakteristiken der Formänderungsgeschwindigkeiten ergeben sich einfache Beziehungen, die für die numerische bzw. graphische Lösung eines vorgelegten Randwertproblems von Nutzen sein können. *R. Moufang.*

**Craemer, H.:** Ausnutzungslinien als Darstellungsmittel in der Plastostatik. Ingenieur-Arch. 20, 129—135 (1952).

Verf. definiert als Ausnutzung eines Elementes  $\mu = \sigma / \sigma_s$ , als Ausnutzung eines Querschnittes  $\nu = M / M_s$  und des Tragwerks als Ganzem  $\omega = P / P_s$ . Hierin ist  $\sigma_s$  die Spannung bei Erreichen der Streckengrenze,  $M$  das wirkende Moment eines Querschnitts,  $P$  die aufgenommene Belastung,  $M_s$ ,  $P_s$  die entsprechenden Höchstwerte bei voller Heranziehung der Plastizität. Die Arbeit untersucht die Beziehungen zwischen den oben definierten Größen für einige charakteristische Fälle, z. B. die Ausnutzung von Querschnitten im Falle eines  $I$ -Querschnittes unter Vernachlässi-



gung der Spannung im Steg und (in besonderen Zuständen) im Falle eines gleichschenkligen Dreiecks mit um eine waagerechte Achse drehendem Moment; die Ausnutzung von Tragwerken im Falle eines Balkens mit konstantem Querschnitt und zwei Einzellasten  $P$  in den Drittpunkten oder mit einer Einzellast im linken Drittpunkt, u. a. *M. Haimovici.*

**Craemer, H.:** Die Formänderungen idealplastischer statisch bestimmter Balken. Ingenieur-Arch. **20**, 126—128 (1952).

Verf. behandelt graphisch die Formänderung eines Balkens auf zwei Stützen mit Rechtecksquerschnitt und zwei symmetrisch angeordneten, gleich großen Einzellasten. *M. Haimovici.*

**Steele, M. C.:** Partially plastic thick-walled cylinder theory. J. appl. Mech. **19**, 133—140 (1952).

Previous theories for partially plastic thick walled cylinders under internal pressure are reviewed. A quantitative comparison is given for (a) compressibility versus incompressibility of material, and (b) von Mises' versus Treasca's theory of failure. The former reveals that deflections at the outside and bore surfaces agree closely, although considerable percentage differences may be found in the axial stresses and strain. Large differences (except for the axial stress) are found in comparing the two theories of failure. Based on the comparison and available experimental evidence, a theory is presented in closed form, to include the Hencky stress-strain relations, incompressibility, and Ludwicks strainhardening functions. (Author's summary.)

**Bieniek, M.:** Principles of dynamics of non-elastic bodies. Arch. Mech. stosow. **4**, 43—91 u. engl. Zusammenfassg. 91—92 (1952) [Polnisch].

In the first part the author discusses some properties of continuous materials important for dynamic problems. A number of rheological models of solid bodies and fluids are presented. In further considerations the author assumes models for which the relation between the stress deviator component  $e$  and the deformation deviator component  $s$  is determined by the following equations:

$$\alpha s + \tau \frac{ds}{dt} + \nu \frac{d^2 s}{dt^2} = 2 G e + 2 \eta \frac{de}{dt} + 2 \mu \frac{d^2 e}{dt^2}, \text{ or } e(t) = \frac{s(t)}{H} + \int_0^t Q(t-\tau) s(\tau) d\tau.$$

Analogous equations determine the relations between the mean stress  $\sigma_{sr}$  and the volumetric deformation  $\theta$ . The equations of motion are presented for the models in question. Assuming the above deformations to be very small the problem leads to a linear one. Two forms of equations of motion are given here. The second part of the paper presents a contribution to the solution of equations of motion for an infinite medium. Solutions are given for the cases of flat, cylindrical and spherical waves. In the third part of the paper the author deals with some problems important for the practice. Namely following problems are solved: a) Forced vibrations in a system with one degree of freedom, for instance, a mass resting upon a thin plastic base, or a mass suspended on weightless bar of plastic material. b) Longitudinal and torsional vibrations of a bar. c) An impact of a rigid body against a bar of plastic material. Autoreferat.

**Cristescu, N.:** Les discontinuités dans le mouvement du fil parfaitement flexible et visco-élastique. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Știi. Natur. **1**, Nr. 1, 68—71 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 71 (1952) [Rumänisch].

On examine quelles sont les discontinuités qui peuvent apparaître dans le mouvement spatial d'un fil parfaitement flexible et visco-élastique. On suppose qu'entre la tension, l'élargement et la vitesse d'allongement existe une relation de type Voigt:  $T = k\lambda + h \partial\lambda/\partial t$ . Dans tels fils peuvent apparaître des discontinuités stationnaires, des discontinuités qui se propagent instantanément et des discontinuités transversales propagables avec la vitesse  $v = \sqrt{(k\lambda + h \partial\lambda/\partial t) \varrho_0^{-1} (1 + \lambda)^{-1}}$ . Autoreferat.

**Teodorescu, P. P.:** Relations entre les efforts et les déformations dans la théorie de l'équilibre des surfaces cylindriques. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Știi. Natur. **1**, Nr. 1, 61—67 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 67 (1952) [Rumänisch].

En supposant que les déplacements tridimensionnels dépendent linéairement de la distance à la surface moyenne déformée, l'auteur établit quelques relations entre les efforts moyens et les déformations dans le cas de flexion des voiles minces cylindriques. Il donne des résultats pour les corps orthotropes en général, en particulierisant pour le corps isotrope, la théorie de membrane et les voiles minces en béton armé. *M. Predleanu.*

**Ziamba, St.: On certain cases of anisotropic friction.** Arch. Mech. stosow. 4, 105—120 u. engl. Zusammenfassg. 120—121 (1952) [Polnisch].

There are several origins of anisotropic friction. It may be caused by the type of crystalline structure of the material as well as by forging, rolling, machining etc. In the case of a body at rest the cone of friction is generally not circular and often asymmetric. A special case presents the so called orthotropic friction. In general the coefficient of friction is a function of direction. For a body sliding on a surface of anisotropic roughness the vector of the force of friction is a function of velocity. The systems of differential equations describing the motion of a point on a plane of anisotropic roughness are very complicated. It is more convenient to establish the equation of motion by projecting the vectors on the directions tangential and normal to the path line of the moving point. The coordinates relative to the forces can be then expressed by known functions of the angle between the vector of velocity and the  $x$ -axis. To illustrate this method an example is discussed where the projections in question are expressed by the following formulae:  $T_x = -\mu_1 m g \cos \alpha$ ,  $T_y = -\mu_2 m g \sin \alpha$ . The trajectory of the end of the force of friction is in this case an ellipse. Autoreferat.

**Hölder, E.: Über die Drehfrequenzbereiche mit instabilen periodischen Torsionsschwingungen bei Kurbelwellen.** Z. angew. Math. Mech. 32, 258—259 (1952).

Es wird bemerkt, daß auch die halbgangen Werte des Periodenquotienten ( $j$  = Verhältnis der Torsionsschwingungsfrequenz zur Umdrehungsfrequenz) Anlaß zu Frequenzbereichen mit instabilen nichtlinearen periodischen Torsionsschwingungen geben. Verf. erörtert die Ausgestaltung einer Theorie zur Bestimmung dieser Frequenzbereiche. B. Dizioğlu.

**Coulomb, J.: Propagation des ondes au fond de la mer et formation des trains de microséismes.** Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 222—225 (1949).

## Hydrodynamik:

### ● **Jacob, Caius: Mathematische Einführung in die Mechanik der Flüssigkeiten.**

Bucuresti : Editura Academiei Republicii Populare Romane 1952. 838 S. [Rumänisch].

Dieses Buch umfaßt eine große Anzahl von Problemen der kompressiblen und inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeiten, insbesondere diejenigen, welche heutzutage eine bedeutende Entwicklung durch neue Methoden erfahren haben. Die Arbeit besteht aus fünf Teilen. — Der erste Teil („Über einige Randprobleme“) befaßt sich ausschließlich mit mathematischen Fragen. Hier werden die zweidimensionalen Probleme von Dirichlet und Neumann dargestellt. Zu ihrer Lösung werden entweder die Theorie der Integralgleichungen oder andere mathematische Hilfsmittel herangezogen. — Teil II („Bewegungsgleichungen“) enthält die Ableitung dieser Gleichungen sowohl für die idealen als auch für die zähen Flüssigkeiten. Es wird das Problem der Bestimmung der Geschwindigkeit behandelt bei bekanntem Wirbelfeld — das sogenannte Poincaré-Stekloffsche Problem. Mittels einer eigenen Methode analysiert Verf. die diesbezügliche Arbeit von Crudelli und führt dieselbe auf die Lichtensteinsche Methode zurück (Grundlagen der Hydrodynamik. Berlin 1929). Dieser Teil endet mit der allgemeinen Behandlung der zweidimensionalen Bewegung der inkompressiblen Flüssigkeit. Hier sind besonders der Fall des Wirbels und der der Doppelquelle in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiete zu erwähnen; beide werden durch eigene Methoden behandelt. — Teil III („Theorien des hydrodynamischen Widerstandes bei den inkompressiblen Flüssigkeiten“) beginnt mit der Helmholtzschen Diskontinuitätshypothese. Im Falle der zweidimensionalen hydrodynamischen Bewegung untersucht Verf. den Fall des kreisförmigen Bogens, wobei er einen (von ihm gefundenen) Eindeutigkeits-Satz sowie die Eigenschaften des Kontraktionskoeffizienten anbringt. Sodann werden der Kutta-Jukowskische Satz und die damit zusammenhängende Jukowskische Theorie des Auftriebes behandelt. Es folgt die Prandtlsche Theorie des dreidimensionalen Tragflügels mit der betreffenden Integrodifferentialgleichung, welche durch eine neue Methode ermittelt wird. — Teil IV („kompressible Flüssigkeiten“) beginnt mit einer mathematischen Einführung in die Theorie der Fortpflanzung der Diskontinuitätswellen in einer idealen Flüssigkeit sowie mit einer kurzen Zusammenfassung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Der wichtigste Abschnitt dieses Teiles ist wohl derjenige, welcher eine deutliche und vollständige Darstellung der hodographischen Methode Tschapliguins enthält, eine heute heuristisch sehr wertvollen Methode, die bis 1932 wenig bekannt war, obgleich sie schon 1902 von ihrem Verf. gegeben wurde. Mittels dieser Methode hat man in der letzten Zeit verschiedene Flüssigkeitsbewegungen im Gebiete der Schallgeschwindigkeit mit großem Erfolg behandeln können. Es werden manche illustrierende Beispiele eingehend betrachtet. — Teil V („Näherungsmethoden in der Mechanik der kompressiblen Flüssigkeiten“) befaßt sich mit den bekanntesten Methoden zur Ermittlung der angenäherten Lösungen, da wo die Bestimmung der exakten Lösung auf große



Schwierigkeiten stößt, und zwar die Methode von Janzen-Rayleigh, die von Imai-Lamla, die von Poggi-Kaplan und schließlich die Linearisierungsmethoden von Glauert und von Prandtl. Darauf wird die hodographische Methode entwickelt, direkt durch den Ansatz, den Tschapliguin selbst angegeben und später Kármán-Tsien und Leray vervollkommen haben. Alle diese Methoden entsprechen vielmehr dem Falle der Unterschallgeschwindigkeit. Für die Fälle der Überschallgeschwindigkeiten wird die Linearisierungsmethode von Ackerett an verschiedenen Profilen entwickelt. Diese Gelegenheit benützt Verf., um einiges über die Theorie der konischen Bewegungen anzubringen. Es wird im besonderen der Fall des dreieckigen, nicht-symmetrischen Tragflügels (neue Ergebnisse des Verf.) behandelt. — Das Buch ist wohl eine systematische mit strengmathematischen Beweisen versehene Darstellung des klassischen Materials, aber auch eine nützliche Ergänzung der bekannten, sich in den meisten Lehrbüchern der Hydrodynamik befindlichen Tatsachen mit den wichtigsten Arbeiten, die in der letzten Zeit erschienen sind. Dabei hat Verf. einen starken Beitrag geliefert, sowohl von seinen gedruckten Arbeiten als auch von seinen ungedruckten Ergebnissen, die in diesem Buche zum ersten Male erschienen sind. Außer den schon vorhin zitierten Arbeiten muß man vielleicht noch erwähnen: eine Verallgemeinerung des Satzes von Fatou-Privalov (S. 20—23), die Verwendung einer neuen Green-Funktion für mehrfach zusammenhängende Gebiete (S. 132—134), das Dirichletsche Problem für die mit geradlinigen Schnitten versehene komplexe Ebene (S. 155—162), die Verwandlung des Hilbertschen Randproblems zu einer nichtsingulären Integralgleichung und deren Behandlung (S. 165—177). Alle diese Kapitel sowie viele andere, die wegen Platzmangels unerwähnt bleiben müssen, verleihen dem Buche einen besonderen Wert für diejenigen, welche Interesse an der aktuellen hydrodynamischen Forschung haben. V. Válcovici.

**Zarantonello, Eduardo H.: A constructive theory for the equations of flows with free boundaries.** Collect. Math. 5, 175—225 (1952).

In der vorliegenden Arbeit wird die ebene Strömung mit Hindernis und freien Stromlinien behandelt. Nach dem Vorgehen von Levi-Civita stellt man die Strömung mit Hilfe eines passenden, im Inneren des halben Einheitskreises variierenden Parameters dar, wodurch das Problem auf die Lösung einer Funktionalgleichung der Gestalt  $\lambda = v \propto (J \lambda) e^{-D \lambda}$  ( $v, \propto$  gegebene Funktionen;  $T, D$  lineare Integraloperatoren) oder kürzer (1)  $\lambda = S \lambda$  führt. Diese Gleichung beherrscht alle Strömungen in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, das von einer freien Stromlinie und einer festen Wand unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen berandet wird. Setzt man, wie es etwa für die numerische Behandlung naheliegt, die Lösung in Gestalt trigonometrischer Polynome  $n$ -ten Grades an und ersetzt das wirkliche Hindernis durch ein passendes anderes, das mit dem wirklichen in  $n$  Punkten übereinstimmt, so gelangt man zu Transformationen, die für die (jetzt in „diskreten“ Punkten gesuchte) Funktion  $\lambda_n$  analog auf eine Gleichung der Form (2)  $\lambda_n = S^{(n)} \lambda_n$  führt, die in  $n$  Punkten zu erfüllen ist. Nach ausführlichen Untersuchungen, die sich gleicherweise auf die Transformationen  $S$  und  $S^{(n)}$  beziehen, gelingt der Beweis für Existenz und Unität der Lösung von (1) und (2) unter bestimmten Voraussetzungen über das Hindernis mittels eines geeigneten Iterationsprozesses. Bei diesem werden die üblichen Iterationen durch gewisse, mit Gewichten behaftete Mittelbildungen ersetzt. Wesentlich müssen dabei die Fälle eines gegenüber der Strömung konvexen oder konkaven Hindernisses unterschieden werden. Zum Schluß wird, ebenfalls unter bestimmten Annahmen über das Hindernis, eine Abschätzung des Fehlers  $|\lambda - \lambda_n|$  hergeleitet, aus der auch die Konvergenz der  $\lambda_n$  gegen  $\lambda$  hervorgeht. K. Maruhn.

**Serrin jr., James B.: Existence theorems for some hydrodynamical free boundary problems.** J. rat. Mech. Analysis 1, 1—48 (1952).

Der Verf. untersucht das Helmholtzsche Kielwasserproblem und 3 weitere Probleme, die sich daraus durch Abänderung der Bedingung ergeben, daß die freien Stromlinien  $\Sigma$  und  $\Sigma^*$  sich bezüglich der hindernisfreien Strömung stromabwärts nach dem Unendlichen erstrecken. Auf diese Weise erhält man das sog. endliche Kielwasserproblem, wenn man an Stelle der obigen Bedingung fordert, daß der Kielwasserbereich endliche Ausmaße haben soll, oder das  $R$ - $J$ -Problem (reentrant jet problem), wenn man fordert, daß  $\Sigma$  und  $\Sigma^*$  umkehren und die Strömung einen auf die Rückseite des Hindernisses einfallenden Strahl bildet. Damit sich auch in diesem Falle eine stetige Strömung ergibt und der Strahl nicht durch das Auftreten auf die Rückseite des Hindernisses unterbrochen wird, wird angenommen, daß er dann in ein zweites Blatt des Strömungsbereichs eintritt („abgesaugt werde“). Ein weiteres behandeltes Problem — das schlechte Kielwasserproblem — ist das, eine Lösung des endlichen oder des Helmholtzschen Kielwasserproblems zu finden, wobei im letzten Falle die freien Stromlinien  $\Sigma$  und  $\Sigma^*$  sich hinreichend weit vom Hindernis entfernt nicht schneiden sollen. Der Verf. beweist im Falle von symmetrischen



Strömungen um symmetrische Hindernisse unter gewissen Voraussetzungen die Lösbarkeit des Helmholtz'schen Kielwasserproblems, des schlichten Kielwasserproblems und des  $R$ - $J$ -Problems. Das geschieht für das Helmholtzproblem dadurch, daß er den Nachweis der Lösbarkeit der Villatschen Integralgleichung erbringt, was mit Hilfe der Leray-Schauderschen Fixpunkttheorie erreicht wird. Eine Lösung der Villatschen Integralgleichung ermöglicht die Konstruktion der gesuchten Strömung. Im Falle des schlichten Kielwasserproblems und des  $R$ - $J$ -Problems geht der Verf. analog vor. Er leitet Funktionalgleichungen ab, die lösbar sind und deren Lösungen die Konstruktion der gewünschten Strömungen ermöglichen. Es ergibt sich in der Arbeit ferner, daß auch in gewissen Fällen Lösungen des endlichen Kielwasserproblems existieren.

*E. Hölder—S. Gähler.*

**Serrin jr., James B.:** Uniqueness theorems for two free boundary problems. *Amer. J. Math.* **74**, 492—506 (1952).

Der Verf. verallgemeinert die von Lavrentieff (dies. Zbl. **22**, 362) für gewisse Hindernisse gewonnene Aussage über die Eindeutigkeit der Lösung des ebenen Helmholtz'schen Kielwasserproblems. Im 1. Teil der Arbeit beweist er (u. a. unter Verwendung des Satzes von Julia) hydrodynamische Vergleichssätze, die er im 2. Teil für die eigentliche Eindeutigkeitstheorie benötigt. Er beschränkt sich auf stetige drehungsfreie symmetrische Strömungen idealer inkompressibler Flüssigkeiten um symmetrische Hindernisse. Ein solches stellt er durch einen Bogen  $A B$  dar, für den er die Existenz einer stetigen Tangente voraussetzt.  $O$  sei der Staupunkt, und der von der Richtung der hindernisfreien Strömung aus im Rechtssinn gemessene Neigungswinkel der Tangente an den Bogen  $A B$  werde mit  $\varphi$  bezeichnet. Wenn es eine Zahl  $\alpha \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$  so gibt, daß entlang  $O B$  die Beziehung  $\alpha - \pi \leq \varphi \leq \alpha$  gilt, wird das symmetrische Hindernis regulär genannt. Der Verf. beweist, daß es höchstens eine symmetrische Strömung gibt, die das Helmholtzproblem im Falle eines regulären Hindernisses löst, und daß es auch höchstens eine symmetrische Strömung gibt, die das schlichte Kielwasserproblem für ein reguläres Hindernis löst. Die letzte Behauptung läßt sich, wie bemerkt wird, auf den Fall allgemeinerer Hindernisse (starlike obstacles) ausdehnen.

*E. Hölder—S. Gähler.*

**Serrin, James:** Two hydrodynamic comparison theorems. *J. rat. Mech. Analysis* **1**, 563—572 (1952).

Wie bei Untersuchungen über ebene Strömungen, so können auch bei Untersuchungen über räumliche Strömungen Vergleichssätze zu großem Vorteil angewandt werden. Das sind Sätze, die Aussagen über das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeiten in gewissen Punkten von Strömungsbereichen liefern. Der Verf. beweist in dieser Arbeit zwei derartige Sätze für axialsymmetrische drehungsfreie Strömungen idealer inkompressibler Flüssigkeiten, wobei er im 2. Satz gleichzeitig den Fall einer ebenen Strömung mitbehandelt. Mit Hilfe dieser Sätze werden in 3 Zusätzen für gewisse Fälle quantitative Abschätzungen der Strömungsgeschwindigkeiten in Wendepunkten von Stromlinien gegeben.

*E. Hölder—S. Gähler.*

**Gilbarg, David:** Uniqueness of axially symmetric flows with free boundaries. *J. rat. Mech. Analysis* **1**, 309—320 (1952).

Es sei  $C$  ein Bogen der  $x$ - $y$ -Ebene, dessen einer Endpunkt die Koordinaten  $a, 0$  hat. Die  $x$ -Achse sei Symmetrieachse einer räumlichen, axialsymmetrischen, stetigen Strömung mit folgenden Eigenschaften: a)  $C$  ist ein Stromlinienbogen. b) Von dem von  $(a, 0)$  verschiedenen Endpunkt von  $C$  geht eine freie Stromlinie  $\Gamma$  aus, die sich in Richtung wachsender  $x$  nach Unendlich erstreckt und längs der die Strömungsgeschwindigkeit den konstanten Betrag  $h$  hat. c) Die Strömung ist innerhalb des durch den Teil der Symmetrieachse mit  $x \leq a$  und den Bogen  $C + \Gamma$  begrenzten Bereichs regulär. Sie erreicht gleichmäßig nach Unendlich hin eine Geschwindigkeit, die die Richtung der  $x$ -Achse und den Betrag  $h$  hat. — Unter Verwendung eines in der Arbeit hergeleiteten hydrodynamischen Vergleichssatzes wird bewiesen, daß es höchstens

eine axialsymmetrische drehungsfreie Strömung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit gibt, die die Bedingungen a)–c) und d) Jede Gerade durch den Ursprung schneidet  $C + I$  höchstens in einem Segment oder einem Punkt (außerdem ist  $I$ , wenn  $x$  nach Unendlich strebt, nach unten konvex) oder d') Die Strömungsgeschwindigkeit ist nirgends größer als  $h$  erfüllt. Als weiteren Fall betrachtet der Verf. eine sog. Strömung an einer Mündung (flow from an orifice) eines unendlich großen axialsymmetrischen Gefäßes oder Kanals und zeigt, daß es bei vorgeschriebenem Fluß höchstens eine derartige axialsymmetrische Strömung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit gibt.

*E. Hölder—S. Gähler.*

**Grosh, N. L.:** A note on the transition from viscous to perfect fluid flow. Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 467—472 (1952).

Daß eine zähe Strömung im Grenzfall verschwindender Zähigkeit nicht auf eine Potentialbewegung zurückgeführt werden kann, liegt nicht im Unterschied der Randbedingungen beider Strömungstypen, sondern in der Tatsache, daß die Lösungen der Bewegungsgleichungen in eine Klasse für drehungsfreie oder drehungskonstante und eine Klasse für drehungsveränderliche Strömungen zerfallen. In der Hodographenebene entspricht dieser Unvereinbarkeit das Fehlen der Eindeutigkeit bei der Aufstellung der Haftbedingung.

*J. Pretsch.*

**Grosh, N. L.:** Note on a class of exact solutions of the two-dimensional flow problem for a viscous incompressible fluid. Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 473—479 (1952).

Wenn die Drehung einer natürlichen Strömung eine Funktion der Stromfunktion  $\psi_1$  der entsprechenden Potentialbewegung mit denselben Rändern ist, kann man die Stromfunktion  $\psi$  der natürlichen Strömung konstruieren (Couette-Strömung). Außerdem werden Strömungen besprochen, für welche  $\psi$  nur von  $\psi_1$  abhängt (zähe Strömung hinter einer ebenen Wand und um einen Zylinder).

*J. Pretsch.*

**Vigier, G.:** Les équations du mouvement des fluides visqueux dans le cas de gradients de vitesses élevés. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 203—221 (1949).

Verf. setzt die Zähigkeitsspannungen als eine zunächst unbekannte Funktion der Geschwindigkeitsgradienten an, von der er annimmt, daß sie in eine MacLaurinsche Reihe entwickelt werden kann. Es läßt sich zeigen, daß diese Reihe nur ungerade Glieder enthält, wobei das lineare Glied der üblicherweise benutzten Newtonschen Hypothese entspricht. Für die Glieder 3. Ordnung werden entsprechende Beziehungen abgeleitet. Die gewonnenen Ergebnisse werden auf die Berechnung der Plattengrenzschicht angewandt. Neben der Reynoldszahl tritt dabei noch ein weiterer Parameter auf, der den Einfluß des Gliedes 3. Ordnung kennzeichnet. Die Blasiusgleichung wird um zusätzliche Glieder erweitert, welche als gemeinsamen Faktor diese neue Kennzahl haben. Als weitere Beispiele werden die Gleichungen für die Strömung zwischen zwei parallelen Wänden sowie zwischen zwei coaxialen Zylindern, von denen sich der eine dreht, abgeleitet. In keinem der behandelten Fälle wird versucht, die Verbindung zu Versuchsergebnissen herzustellen, um den behaupteten Einfluß des dritten Gliedes auch zahlenmäßig zu belegen.

*W. Wuest.*

**Hopf, Eberhard:** Statistical hydromechanics and functional calculus. J. rat. Mech. Analysis 1, 87—123 (1952).

Der Verf. beschäftigt sich mit den statistischen Eigenschaften der Phasenbewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte 1. Er bezeichnet mit  $P^t(A)$  die Phasenverteilung zur Zeit  $t$ , d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß zur Zeit  $t$  eine Phase dem Teilbereich  $A$  des Phasenraumes  $\Omega$  angehört, und führt das charakteristische Funktional  $\Phi(y, t) = e^{i(y, u)} = \int_{\Omega} e^{i(y, u)} P^t(du)$  dieser Phasenverteilung ein, wobei  $(y, u) = \int_R y_\alpha u_\alpha dx$  das Skalarprodukt des Geschwindigkeitsfeldes  $u = u(x)$ ,  $x \in R$ , mit einem beliebigen reellen stetigen Vektorfeld  $y = y(x)$  bedeutet. Er stellt die Korrelationen  $u_\alpha(x^1) \cdots u_\omega(x^n)$  der Geschwindigkeitskomponenten in  $n$  Raumpunkten durch die im Sinne von Volterra gebildeten  $n$ -ten Funktionalableitungen  $\partial^n \Phi / [\partial y_\alpha(x^1) dx^1 \cdots \partial y_\omega(x^n) dx^n]$  dar. Unter gewissen Voraussetzungen

leitet er für den Fall eines unbegrenzten Flüssigkeitsbereiches aus den Navier-Stokesschen Gleichungen eine Funktionaldifferentialgleichung ab, in der  $\partial\Phi/\partial t$  durch die 1. und 2. Funktionalableitung von  $\Phi$  ausgedrückt wird. Diese liefert eine direkte differentielle Beschreibung der Veränderung der Phasenverteilung in Übereinstimmung mit den Strömungsgesetzen. Indem man das Vektorfeld  $y(x)$  durch das Vektorfeld  $z(k) = \int e^{-ix \cdot k} y(x) dx$  über einem  $k$ -Raum,  $k = (k_1, k_2, k_3)$ , ersetzt [ $y(x) = (2\pi)^{-3} \int e^{ik \cdot x} z(k) dk$ ] und indem man die Bezeichnung  $\bar{z} = z - (k \cdot z/k^2) k$  benutzt, bekommt diese Funktionaldifferentialgleichung die Form

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_{k'} \frac{\partial}{\partial z_{\beta}(k')} dk' \left[ \int_{k''} \bar{z}_{\alpha}(k' + k'') k''_{\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{\alpha}(k'')} dk'' \right] dk' - \mu \int |k|^2 z_{\alpha}(k) \frac{\partial \Phi}{\partial z_{\alpha}(k)} dk,$$

wobei  $\mu$  die Viskosität ist. Es werden für  $\mu = 0$  zwei stationäre Lösungen dieser Gleichung angeführt, von denen jedoch keine die stationäre Turbulenz im Grenzfalle  $\mu = 0$  wirklich repräsentiert. E. Hölder—S. Gähler.

**Rogers, Robert A.:** Extension of „The dynamic effects in rotor blade bending“. J. aeronaut. Sci. 19, 349—350 (1952).

**Gotusso, Guido:** Sulle equazioni dei fluidi in meccanica aleatoria. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 383—390 (1952).

**Adamov, G. A.:** Die Strömung realer Gase durch vertikale Röhren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 457—460 (1952) [Russisch].

Im Artikel wird eine praktisch genaue Formel für die senkrechte Strömung von realen Gasen bei hohen Drucken abgeleitet, die speziell die Berechnung des Abbaudrucks in Gas-Bohrlöchern gestattet. Aus der Einleitung.

**Dorfman, L. A.:** Berechnung der wirbelfreien Strömung um ein Profilgitter und Konstruktion von Gittern mit vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung an den Profilen. Priklad. Mat. Mech. 16, 599—612 (1952) [Russisch].

In der Arbeit wird die Bestimmung der Umströmung von Profilen im Schaufelgitter mit Hilfe der konformen Abbildung eines vorgegebenen Gitters auf das der Platten untersucht. Es werden zwei Aufgaben gelöst: die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung für das vorgegebene Gitter und das inverse Problem — die Bestimmung der Profilform im Gitter nach vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung längs der Profile. Zusammenfassg. des Autors.

**Poliljachov, N. N.:** Die Strömung um Gitter von Raumprofilen vorgegebener Form. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 233—236 (1952) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Berechnung eines Schaufelgitters von vorgegebener Form und Staffelungswinkel angegeben, das für beliebige Dichten  $q$  gleich anwendbar ist. Diesem Verfahren liegt die konforme Abbildung des Gitters gewisser Ovale mit dem Staffelungswinkel  $\pi/2$  auf das gegebene Gitter zugrunde. Zur Verwirklichung dieser Abbildung muß man vorher die Abbildung des genannten Ovalgitters auf das Plattengitter mit dem Staffelungswinkel  $\pi/2$  kennen, das nach dem Verfahren von Žukovskij (N. E. Žukovskij, Die Wirbeltheorie des Propellers, dritter Artikel, ausgewählte Werke, 2, 1948) auf ein Plattengitter mit beliebigem Staffelungswinkel abgebildet wird. Alle diese Hilfsabbildungen lassen sich leicht ausführen und tabulieren. Aus diesem Grunde wird die Berechnung des Gitters der räumlichen Profile einfach und unterscheidet sich der Form nach wenig von der Berechnung eines isolierten Profils. Aus der Einleitung.

**Kuzmak, G. E.:** Über eine Darstellung der Lösung der fundamentalen Integrodifferentialgleichung eines Flügels. Priklad. Mat. Mech. 16, 715—718 (1952) [Russisch].

Bei der Darstellung eines Flügels endlicher Spannweite durch eine tragende Linie mit veränderlicher Zirkulation ergibt sich bekanntlich für die Berechnung der Zirkulation eine Integrodifferentialgleichung, für deren Lösung zahlreiche Ansätze existieren. Verf. diskutiert ein Lösungsverfahren. — Verf. ist offenbar wichtige Literatur zu diesem Thema nicht bekannt (z. B. H. Multhopp: Jahrbuch Deutsch. Luftfahrtforsch. 1938, 101). Für eine praktische Anwendung ist das gezeigte Verfahren vom Verf. nicht entwickelt worden. G. Bock.

● **Hilton, W. F.:** High-speed aerodynamics. With an introduction by Sir Leonhard Bairstow. London, New York and Toronto: Longmans, Green and Co., Ltd., 1952. IX, 598 p. 60 s. net.



Liest man dieses Buch mit den Augen dessen, der die klassische Aerodynamik und die Grundlagen der Gasdynamik bereits kennt, so wird man seine Freude haben an der Fülle von numerischem und graphischem, theoretischem und experimentellem Material (das natürlich, wie immer bei solchen Sachen, unter den üblichen Geheimhaltungsvorschriften leiden muß), an den vielfach neuen Gesichtspunkten, an den einfachen (wenn auch oft übereinfachen) physikalischen Erklärungen. — Das Buch kreist mit etwa einem Drittel seines Inhalts um das zentrale Thema „transonics“, ein Gebiet, auf dem bisher die Erkenntnisse nur in  $\epsilon$ -Schritten vorankam. Doch wurde schon 1946 von Guderley in Deutschland und von v. Kármán (dies. Zbl. **35**, 261) in USA, und unabhängig 1947 von Oswatitsch (damals in Farnborough, also in unmittelbarer Nachbarschaft des NPL) das schallnahe Ähnlichkeitsgesetz abgeleitet. Es erwies sich auch als bald für die Praxis als ein unentbehrliches und zutreffendes Mittel der systematischen Koordinierung schallnaher Meßergebnisse, aber gerade hiervon — einem der wenigen bisher praktisch brauchbaren Resultate aus „transonics“ — hört man im Buche nichts. — Das Buch gliedert sich in viele Teile. Teil 1 behandelt „Subsonics and Transonics“ in acht Kapiteln auf rund 175 Seiten. Es wird der Begriff des „shock-stall“ definiert („kompressibles Abreißen“ ist das umständlichere deutsche Wort), sein Einfluß auf Widerstand, Auftrieb und Druckverteilung, und auf das Kippmoment wird eingehend besprochen, Stabilitäts- und Steuerungsprobleme werden diskutiert und eine Einführung in die Technik des Messens hoher Geschwindigkeiten gegeben. Der etwa gleich große Teil 2 behandelt „Supersonics and Hypersonics“ in fünf Kapiteln. Nach kurzer Einführung in das typische Wesen der Überschallströmung wird vor allem der zweidimensionale Flügel sehr ausführlich besprochen, wo natürlich Ackerets Näherung und Busemanns Theorie zweiter Ordnung im Vordergrund stehen und auch die üblichen Optimumsprobleme der Profilwahl nicht vergessen sind. Der dreidimensionale Flügel wird nicht ganz so tiefdringend behandelt, doch werden die Grundzüge seines Überschallverhaltens als Funktion seines Umrisses erkennbar. Noch kürzer kommt der Rumpf und seine Interferenz mit dem Flügel weg. Naturgemäß fließt die experimentelle Quelle in diesem zweiten Teil, der mit einem kurzen Kapitel „Hypersonics and Superaerodynamics“ schließt, nicht ganz so reichlich wie im ersten Teil. Zweifelloos am besten und insgesamt ganz ausgezeichnet ist der Teil 3, „Wind Tunnels“, gelungen. Hier spricht ein langjähriger Experimentator auf rund 120 Seiten in zwei Kapiteln über allgemeine physikalische Prinzipien so gut wie über technische Detailfragen der Windkanalkonstruktion, über theoretische Ansätze der Berechnung so gut wie über Installation der Meßgeräte und Meßtechnik, im Unterschall so gut wie im Überschall. Teil 4 „General“ behandelt in fünf Kapiteln auf rund 110 Seiten so verschiedene Themen wie Thermodynamik, Luftschrauben, die verschiedenen Arten von Strahlantrieben und auf knapp 10 Seiten das heikle Thema der instationären Strömung bei Schallgeschwindigkeit, sowie zum Abschluß die elementare inkompressible Aerodynamik.

H. Behrbohm.

Stone, A. H.: On supersonic flow past a slightly yawing cone. II. J. Math. Physics **30**, 200—213 (1952).

(Teil I, dies. Zbl. **40**, 410.) Die „halblineare“ Strömung um einen angestellten Kreiskegel, bei der man also von der bekannten axialsymmetrischen Lösung ausgeht und den Einfluß des Anstellwinkels  $\epsilon$  nach den Methoden der Störungsrechnung linear berücksichtigt, wird auf Glieder in  $\epsilon^2$  ausgedehnt.

C. Heinz.

Barenblatt, G. I.: Über gewisse instationäre Bewegungen einer Flüssigkeit und eines Gases in einem porösen Medium. Priklad. Mat. Mech. **16**, 67—78 (1952) [Russisch].

Le problème se rapporte à l'étude de mouvement nonpermanent d'un fluide dans un milieu poreux dans le cas où la densité  $\rho$  satisfait à l'équation de L. S. Leibenson:  $c \partial \rho / \partial t = \Delta \rho^{n+1}$ , où  $c$  est une constante caractérisée par des propriétés de milieu et de fluide et où  $n$  présente l'exposant de la polytrophe. L'A. applique la théorie de la similitude et construit les solutions du problème, correspondantes au mouvement plan et au mouvement symétrique par rapport à un axe ou à un point. Le travail contient le calcul détaillé de quelques cas particuliers.

C. Woronetz.

Moiseev, N. N.: Eine Aufgabe über die kleinen Schwingungen eines offenen Gefäßes mit Flüssigkeit unter der Wirkung einer elastischen Kraft. Ukrain. mat. Žurn. **4**, 168—173 (1952) [Russisch].

Es werden die kleinen Schwingungen eines rechteckigen offenen Gefäßes mit Masse  $m_1$  unter der Wirkung einer elastischen Kraft mit Charakteristik  $Mk^2$  untersucht, das im Ruhezustand auf Höhe  $h$  mit Flüssigkeit (Masse  $m_2$ ) gefüllt ist ( $m_1 + m_2 = M$ ). Die Schwingungen erfolgen in Richtung der horizontalen  $x$ -Achse; die Relativbewegung der Flüssigkeit wird auf ein mit dem Gefäß fest verbundenes

Koordinatensystem bezogen:  $\xi$  hat die Richtung von  $x$ , liegt auf der freien Oberfläche der Flüssigkeit und halbiert die Innenlänge  $l$  des Gefäßes. Vorausgesetzt werden ideale Flüssigkeit und Strömung mit Potential  $\varphi(\xi, \eta, t)$ . Die Bewegungsgleichung des Systems lautet:

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\rho}{M} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-h}^0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \xi} d\xi d\eta = -k^2 x;$$

zu bestimmen sind  $\varphi(\xi, \eta, t)$  und  $x(t)$ . Es wird die partikuläre Lösung  $\varphi = f(t) a(\xi) b(\eta)$  behandelt. Aus der Laplaceschen Gleichung und den Grenzbedingungen werden die Funktionen  $a(\xi)$  und  $b(\eta)$  bestimmt. Nach Entwicklung der Funktion  $\eta = \xi$  in Fourierscher Reihe ergeben sich die Differentialgleichungen (2)  $f_i'' + (i\pi g/l) \operatorname{th}(i\pi h/l) f_i = X'(t) a_i / \operatorname{ch}(i\pi h/l)$ , die unabhängig voneinander integriert werden können ( $X(t) = d^2 x / dt^2$ ). Für die Bewegung des Systems sind auf Grund von (1) die Differentialgleichungen

$$(3) \quad x'' + \sum_{n=0} d_{2n+1} f'_{2n+1} = -k^2 x, \quad f''_{2n+1} + \sigma_{2n+1}^2 f + x''' b_{2n+1} = 0$$

abgeleitet mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  Bei Einschränkung auf einige erste Glieder der Entwicklung nach Eigenfunktionen kann das System in endlicher Anzahl linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten überführt und näherungsweise integriert werden. Auf Grund der Lösung  $X = B e^{\omega t} f_{2n+1} = A_{2n+1} e^{\omega t}$  ist schließlich die sogenannte Frequenzgleichung  $\omega^2 + k^2 = \omega^4 \sum (d_{2n+1} b_{2n+1}) / (\omega^2 + \sigma_{2n+1}^2)$  abgeleitet und auf ihre Wurzeln untersucht worden. Daraus folgt das Theorem: Im Sinne Ljapunovs ist die Bewegung nach dem System (3) stabil. Das entwickelte Verfahren kann bei der Lösung technischer Aufgaben Anwendung finden; die Näherung und der rechnerische Aufwand sind wegen der Kürze der Fassung nicht ausreichend ersichtlich.

M. Popov.

**Sekerž-Zeňkovič, Ja. I.: Zum dreidimensionalen Problem der stehenden Wellen endlicher Amplitude auf der Oberfläche einer schweren Flüssigkeit.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 35—38 (1952) [Russisch].

Wir betrachten die dreidimensionale Bewegung einer schweren idealen inkompressiblen Flüssigkeit, die nur nach oben von einer freien Fläche begrenzt ist, auf der der Druck konstant und gleich Null ist. Wir suchen die genaue Lösung des Problems der dreidimensionalen stehenden Wellen von endlicher Amplitude an der Oberfläche der vorgegebenen Flüssigkeit. In der uns bekannten Literatur gibt es nur eine von Penney und Price (dies. Zbl. 46, 198) angegebene Näherungslösung solch einer Aufgabe. Unser Versuch galt der genauen Lösung des gestellten Problems und die von uns erhaltenen Resultate werden hier kurz dargelegt. Dabei verallgemeinern wir die von uns in der in diesem Zbl. 30, 86 referierten Arbeit für den Fall der ebenen einfachen stehenden Welle angewandte Lösungsmethode [s. a.: Ja. I. Sekerž-Zeňkovič, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geogr. i geofiz., 1951, Nr. 5, 57].

Aus der Einleitung.

## Wärmelehre:

**Pöschl, Theodor: Eine Bemerkung zu den Beispielen aus der Mechanik.** Math. Nachr. 8, 155—156 (1952).

Bei der Behandlung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der Systeme mit lebenden Wesen muß beachtet werden, daß durch das Lebewesen Energie erzeugt und dem System zugeführt wird. An einem einfachen Beispiel von E. T. Whittaker wird dieser Sachverhalt erläutert.

B. Dizioğlu.

**Chinčhin, A. Ja.: Über einige allgemeine Sätze der statistischen Physik.** Trudy mat. Inst. Steklov. Nr. 38, 345—365 (1951) [Russisch].

It would appear that the main result proved in this paper can be formulated as follows: (i) We have a system of  $N = \sum N_r$  particles of energy  $E$  and volume  $V$ ,  $N_r$  being the number of particles in energy level  $r$ . One considers the limit  $L$  defined by the requirement that  $N \rightarrow \infty$  while  $N/V$ ,  $E/N$  remain constant. (ii)  $F \equiv F(N_1, N_2, \dots)$  is a macroscopic observable, and we shall write  $F'$  for  $F(N'_1, N'_2, \dots)$ .

The function  $F$  will be called „smooth“ if for all admissible sets of values  $N_r$ , there exists a positive  $\mu$  and a positive function  $\Phi = \Phi(N_1/N, N_2/N, \dots)$  such that for every  $\lambda > 0$ , however small, the inequality

$$|F' - F| \leq c |F| \Phi \sum_{r=1}^{\infty} [(N'_r - N_r)/N]^{\mu} \exp(r\lambda)$$

can be satisfied by choosing the constant  $c$  sufficiently large. (iii) Let  $Q(N, E)$  be the number of those of the available  $\Omega(N, E)$  quantum states for which  $(F - \bar{F})/\bar{F} > \varepsilon$ , where  $\bar{F}$  is given, and  $\varepsilon$  is an arbitrary positive number. A macroscopic function  $F$  is called „normal“ if there exists an  $\bar{F}$ , independent of  $\varepsilon$ , such that  $Q(N, E)/\Omega(N, E) \rightarrow 0$  in the limit  $L$ . With these definitions the theorem states that any macroscopic variable  $F$  which is symmetrical in the energies of the particles is normal if it is smooth. This result furnishes a justification for the use of the micro-canonical ensemble in the quantum statistics of weakly interacting particles, provided the observable is smooth in the above sense. The assumption of weak interaction remains a serious restriction in the theorem.

*P. T. Landsberg.*

**Klimontovič, Ju. L.: Die relativistische Gleichung für die Quantenfunktion einer Verteilung.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 927—930 (1952) [Russisch].

The author develops general equations for the probability distribution function of a system subject to variable external conditions, the requirements of relativity being borne in mind.

*P. T. Landsberg.*

**Montroll, Elliott W. and Gordon F. Newell: Unsteady-state separation performance of cascades. I.** J. appl. Phys. 23, 184—194 (1952).

The authors first outline the practical problems of multistage processes for the separation of components of a mixture, stressing the importance of unsteady types of behaviour. The mathematical theory is based on the Rayleigh separation formula for a single stage. Denote by  $c(n, T)$  the concentration at the  $n$ -th stage at time  $T$ , and treat  $n$  as a continuous variable, the total number of stages being very large. There results, for the case of a „square cascade“, the partial differential equation  $2\tau \partial c / \partial T = \partial / \partial n \{ \partial c / \partial n - \psi c(1 - c) + P c/L \}$ , where  $\tau$ ,  $\psi$ ,  $P$  and  $L$  are constants, with certain boundary and initial conditions. The main point of the paper is that this equation can be transformed to  $\Phi_t = \Phi_{xx}$ , the boundary and initial conditions being also linearised. Standard methods are then applied to find explicit solutions concerning finite, infinite and semi-infinite cascades. An appendix discusses linearisations of partial differential equations more generally. Comparisons are made with similar devices in the theories of heat and of turbulence.

*F. V. Atkinson.*

**Minasjan, R. S.: Über die ebene, stationäre Temperaturverteilung in inhomogenen, prismatischen Körpern.** Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, fiz.-mat. estest. techn. Nauki 5, Nr. 5, 1—24 und armen. Zusammenfassg. 24 (1952) [Russisch].

Die Potentialgleichung wird zuerst für ein Quadrat behandelt, das im Innern konzentrisch-parallel ein Kernquadrat aus einem anderen Medium enthält. Das Kernviereck wie auch der umgebende Vierecksring werden je für sich als homogen angenommen. Die Randtemperaturen und eine symmetrische Wärmequellenverteilung im Innern sind beliebig vorzugeben. Es gelingt dem Verf., die Lösung mittels einer Reihe von hyperbolischen und Kreis-Funktionen der Koordinaten  $x, y$  auszudrücken. Als zweites behandelt er ein Gebiet, das aus der Überdeckung zweier Rechtecke  $(0 < x < a)$ ,  $(0 < y < b)$  und  $(0 < x < c)$ ,  $(0 < y < d)$  mit  $a < c$ ,  $d < b$  entsteht, wobei das Durchschnitts-Rechteck  $(0, a)$ ,  $(0, d)$  wie auch jeder der beiden Schenkel  $(a, c)$   $(0, d)$  und  $(0, a)$   $(d, b)$  in sich homogen, doch von den beiden anderen Rechtecken verschieden sein soll. Hierbei werden nur die Temperaturen am Rande vorgeschrieben, aber keine anderen Wärmequellen angenommen. Die Lösungen haben wieder die Form von Reihen über Produkte aus hyperbolischen und Kreis-Funktionen.

*U. T. Bödewadt.*



## Elektrodynamik. Optik :

● Jouguet, Marc: *Traité d'électricité théorique. I.: Électrostatique.* (Collection Technique et Scientifique du Centre National d'Études des Télécommunications). Paris: Gauthier-Villars 1952. VII, 360 p. 80 fig. 3840 f.

Cet ouvrage correspondant à un enseignement donné aux élèves-ingénieurs électriciens expose l'électrostatique théorique générale considérée exclusivement du point de vue macroscopique. Après un premier chapitre exposant les propriétés générales du champ électrostatique et des équations fondamentales qui le déterminent, le second chapitre étudie l'équilibre électrique des conducteurs homogènes, les phénomènes d'influence, les notions de capacité et la théorie des condensateurs. Le troisième chapitre expose la théorie des diélectriques. Le chapitre IV est consacré à l'examen de l'équilibre électrique dans le cas des conducteurs non homogènes et à la théorie des piles. Le chapitre V examine l'introduction des grandeurs thermodynamiques en électrostatique; énergie et travail, entropie, énergie et potentiels internes, énergie utilisable. Le chapitre VI expose la théorie des forces électromécaniques dans les différents cas: solides indéformables, solides déformables, fluides isotropes polarisés. Des compléments importants accompagnant chaque chapitre étendent le contenu de cet ouvrage qui constitue l'un des meilleurs exposés actuels de l'électrostatique.

G. Petiau.

Gans, Ricardo: *Das Problem der Maxwellschen Spannungen.* Univ. nac. Tucumán, Publ. Nr. 641 (Inst. Fis. Nr. 31), 11—18 (1952) [Spanisch].

Derjugin, L. N.: *Zurückführung eines Randwertproblems für Wirbelströme in einer Scheibe auf Quadraturen.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 389—392 (1952) [Russisch].

The problem is that of a disc, radius  $R$  and thickness  $b$ , of uniform material of permeability  $\eta$ , rotating with fixed angular velocity  $\omega$  in a fixed magnetic field. This field is parallel to the axis of the disc, and is to vanish outside a region whose shape is that of a cylinder, with axes parallel to the field, of general cross-section  $F$  lying within the disc. Using Neumann's law, and taking the field within the disc not to vary in the axial direction, expressions are found for the rate of dissipation of energy in the disc and for the moment exerted on the disc, in terms of quadratures. In part of the paper the magnetic field is taken to be of uniform intensity, though this does not seem essential.

F. V. Atkinson.

Herriot, John G.: *The polarization of a lens.* Pacific J. Math. 1, 369—397 (1951).

If a conducting solid is introduced into a uniform electric field with direction determined by the unit vector  $h$ , the field is changed by the addition of a field of potential  $\psi$ , where  $\psi$  is harmonic outside the body, behaves like a dipole at infinity and satisfies on the surface of the body the boundary condition  $\psi = h \cdot r + \text{constant}$ . The energy  $P = \int |\text{grad } \psi|^2 dr$ , where the integral is extended over the exterior of the body, is a quadratic form  $P = \sum P_{ik} h_i h_k$  in the components  $h_i$  of  $h$ . The quantity  $P$  is called the polarization of the body in the direction  $h'$ , and  $P_m = P_{1,1} + P_{2,2} + P_{3,3}$ , which is independent of coordinates, is called the average polarization. For a spherical body of volume  $V$ ,  $P_m = 2V$ , and it has been conjectured that for other bodies  $P_m > 2V$ . If  $C$  is the electrostatic capacity of the body,  $V \leq \frac{4}{3}\pi C^3$ ; hence the inequality (\*)  $P_m + V \geq 4\pi C^3$  is stronger than  $P_m \geq 2V$ . In the present paper, the author proves (\*) for several cases of the lens, a lens being a body bounded by two spherical caps. Special or limiting cases of lenses are the spherical bowl (the two caps coincide), the lens with orthogonal caps, two tangent spheres (the two caps reduce to zero), and the symmetric lens (two equal caps). These are the cases for which (\*) is proved. The proofs are based in an analysis of explicit representations of  $P_m$  and  $C$  for a lens in terms of definite integrals given by Schiffer and Szegő (this Zbl. 35, 118) and Szegő [Bull. Amer. math. Soc. 51, 325—350 (1945)]. The analysis is very detailed and intricate and it would be unfeasible to attempt to sketch it here.

J. W. Green (Math. Rev. 13, 460).

Tellegen, B. D. H.: A general network theorem, with applications. Phillips Research Rep. 7, 259—269 (1952). Note. Ibidem 477.

Genügen in einem Netzwerk die Zweigströme  $i$  den Knotenpunktgleichungen und genügen die Zweigspannungen  $v$  den Maschengleichungen (ohne daß darüber hinaus eine Beziehung zwischen den Strömen und den Spannungen gefordert wird), so verschwindet die über alle Zweige des Netzwerks erstreckte Summe  $\sum i v$ . Von diesem Satz [der der zusätzlichen Note zufolge bereits in einer Arbeit von K. Posthumus und Tj. Douma, Phillips Transmitting News 3, Nr. 4 (1936) bewiesen wurde], macht Verf. Anwendungen auf den Energiesatz und das Reziprozitätstheorem für Vierpole sowie auf die Art, wie sich die dem Netzwerk zugeführte Energie auf die elektrische, die magnetische und die in Wärme umgesetzte Energie verteilt. A. Stöhr.

Teodorescu, N.: Introduction physico-mathématique à la théorie invariante de la propagation des ondes. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. București, Ser. Știi. Natur. 1, Nr. 1, 25—49 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 49—51 (1952) [Rumänisch].

L'A. expose les principes de Huygens des ondes-enveloppes et de l'onde épacentrale et passe en revue les théories de Vessiot, de Hadamard et de lui-même, relative à l'intégration des équations aux dérivées partielles. Certaines observations faites sur ces théories au point de vue de l'application des principes de Huygens, conduit ensuite l'A. à considérer comme élément constitutif de l'onde, le corpuscule, qui par définition est un élément de contact qui a le centre dans le point ébranlé. Une onde est alors conçue comme lieu de corpuscules ayant comme centres les points ébranlés à un moment donné et l'onde épacentrale issue d'un point ébranlé est constituée de corpuscules qui ont le centre dans ce point. On définit les corpuscules associés, les corpuscules de propagation ou d'alimentation, l'onde élémentaire, l'onde de champs (l'onde épacentrale), le corpuscule-événement et avec ces notions on présente sous un nouvel aspect la théorie de la propagation par ondes, ce qui conduit l'A. à la nécessité d'un point de vue unitaire dans l'étude des phénomènes ondulatoires, qui est utile dans l'intégration des équations aux dérivées partielles. La connexion de l'espace n'apparaît pas lorsque le phénomène est considéré seulement sous son aspect géométrico-cinématique, mais elle s'impose si l'on compare les grandeurs vectorielles transportées par la propagation. Pour les équations du second ordre, cette connexion est riemannienne, comme dans la théorie de Hadamard et pour les équations d'ordre supérieur, elle est finslerienne, comme a montré l'A. dans un travail antérieur. J. Elianu.

● Colino, Antonio: Mikrowellen. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones científicas 1952. 192 p. 164 Fig.

Das vorliegende Büchlein ist aus Vorlesungen des Verf. entstanden. Es gibt dem Anfänger die Grundlagen der Mikrowellenelektronik. Die Probleme werden mathematisch behandelt und anschaulich integriert. Gewisse Vorkenntnisse der Elektrodynamik werden vorausgesetzt. Im ersten Kapitel behandelt Verf. die Grundlagen der Leitungstheorie sowie die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in unendlich ausgedehnten Medien und Hohlleitern. Daran schließen sich Kapitel über Hohlraumresonatoren, Wellenmesser, Mikrowellenkreise und die Wechselwirkung zwischen Partikeln und Wellen an. Ein Kapitel über Mikrowellenantennen beschließt das Bändchen. H. Falkenhagen.

Dike, S. H.: Difficulties with present solutions of the Hallén integral equation. Quart. appl. Math. 10, 225—241 (1952).

The author, while accepting Hallén's integral equation as sufficiently accurate for the purposes of antenna theory, questions the accuracy of procedures used to find an approximate solution. He is largely concerned with the work of R. W. P. King and D. Middleton [Quart. appl. Math. 3, 302—335 (1946)], who have given a general method in which a trial-function  $g(z, z')$  and a parameter  $\psi$  are selected, and used as the basis of an iterative solution. In a previous paper with D. King [Proc. Inst. Radio Engineers 40, 853—860 (1952)], the author considered discrepancies with experiment. He is now mainly concerned with the absence of a consistent theory, with particular reference to absorption gain and back-scattering cross-section. He appears to favour the retention of the King-Middleton trial-function with a modified value of  $\psi$ , though the development of an alternative method, perhaps based on Fourier series, is also suggested. A discussion of the controversy in more general terms, including a reply from R. King to the author's objections, is to be found in Proc. Inst. Radio Engineers 41, 926—934 (1953).

F. V. Atkinson.

Pannenberg, A. E.: On the scattering matrix of symmetrical waveguide junctions. Philips Research Rep. 7, 131—157 (1952).

Die zu besprechende Arbeit stellt die Diss. des Verf. an der Technischen Hochschule in Delft dar und behandelt das elektromagnetische Verhalten kurzwelliger Kreise mit Hilfe der Streumatrix. Besondere Aufmerksamkeit wird dem Verhalten der Resonatoren gewidmet. Die von Tomonaga [J. phys. Soc. Japan 2, 158 (1947); 3, 93 (1948)] gewonnenen Resultate werden hinsichtlich ihrer praktischen Anwendbarkeit weiter entwickelt. Der Verf. stellt allgemeine Betrachtungen an.

tungen auf Grund der strukturellen Symmetrie von Kurzwellenkreisen an und gibt eine ausführliche Diskussion von Verbindungsstücken, welche aus zwei parallelen Gliedern bestehen. Er behandelt rechteckige Hohlleiter mit einer gemeinsamen Seite und leitet die Theorie für „directional couplers“ ab, welche diesen Symmetrieforderungen genügen. *P. Urban.*

**Pannenberg, A. E.: On the scattering matrix of symmetrical waveguide junctions.** Philips Research Rep. 7, 169—188 (1952).

Besitzt eine Wellenleiterverbindung einen gewissen Grad von Symmetrie, so ist die Zahl der Konstanten, welche zur Beschreibung ihres Verhaltens notwendig ist, geringer als für den allgemeinen nichtsymmetrischen Fall. Eine Methode zur Durchführung einer Reduktion von Konstanten gab zuerst Dicke (C. G. Montgomery, R. H. Dicke und E. M. Purcell, Principles of Microwave circuits, New York 1948, Chap. 12) für den verlustfreien Fall. Die Streumatrix einer verlustfreien Verbindung ist bekanntlich unitär und kann daher stets durch eine passende Ähnlichkeitstransformation diagonal gemacht werden. Um auch die Verluste zu berücksichtigen, hat kürzlich Kerns [J. Res. nat. Bur. Standards 46, 267—278 (1951)] die Theorie in strengerer mathematischer Form unter ausgiebiger Benützung der Gruppentheorie dargestellt. In diesem Kapitel (Kap. III) wird die Theorie von Kerns unter Berücksichtigung einiger Gesichtspunkte von Dicke zusammengestellt. Dabei werden einige Kenntnisse der Theorie endlicher Gruppen vorausgesetzt. *P. Urban.*

**Pannenberg, A. E.: On the scattering matrix of symmetrical waveguide junctions.** Philips Research Rep. 7, 270—302 (1952).

Die zu besprechende Arbeit stellt das 5. Kapitel der Diss. des Verf. an der T. H. Delft dar und ist den Richtungskopplern gewidmet. Dabei finden auch die grundlegenden Arbeiten von H. A. Bethe aus dem Jahre 1944 [Phys. Review, II. Ser. 66, 163 (1944) etc.] ihre Verwendung. Die Frequenzabhängigkeit der Richtungskoppler sowie die Wirkung von Resonanzschlitzen und die hierfür notwendigen Messungen werden ausführlich erörtert. Ein eingehendes Literaturverzeichnis gibt einen guten Überblick über die bisher erschienenen Arbeiten. *P. Urban.*

**Müller, Claus: Über die Beugung elektromagnetischer Schwingungen an endlichen homogenen Körpern.** Math. Ann. 123, 345—378 (1951).

The author continues his work on the existence and uniqueness of a solution of Maxwell's equations, arising from prescribed harmonic sources in an infinite inhomogeneous medium. He has previously (see this Zbl. 36, 409) established such results for a wide range of cases in which the parameters characterising the inhomogeneous medium vary continuously. The present paper deals with the special case of discontinuous parameters given by a finite homogeneous diffracting body  $V$  immersed in an infinite homogeneous medium  $W$ , where  $W$  also contains a finite source-distribution. The method is, as previously, that of reduction to a system of integral equations, taken in this case over  $F$ , the boundary of  $V$ ,  $F$  being assumed analytic. One difficulty in this method is that of ensuring that the integral equations are of Fredholm type, or reducible to such by iteration; this requires that the kernel-matrix, defined over  $F$ , should not have infinities of the order of  $r^{-2}$ . In the first section of the paper, the author finds suitable integral equations, which in vector-form run

$$\mathbf{j}'_i = \frac{2\varepsilon_a}{(\varepsilon_i + \varepsilon_a)} \cdot \mathbf{j}'_e + (2\pi)^{-1} (\varepsilon_i + \varepsilon_a)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_F [\mathbf{n} \times (\mathbf{j}'_i \times \nabla'(\varepsilon_a \varphi_a - \varepsilon_i \varphi_i))] dF - \left( \frac{i}{\omega} \right) \int_F [(\mathbf{n} \times \mathbf{i}_i)(k_a^2 \varphi_a - k_i^2 \varphi_i) + \mathbf{n} \times (\mathbf{i}_i \nabla) \nabla(\varphi_a - \varphi_i)] dF \right\},$$

and a second, analogous equation. Here  $\varepsilon, \mu$  denote the parameters of the media,  $\varphi = e^{ikr}/r$ ,  $\omega$  is the frequency,  $k = (\omega^2 \varepsilon \mu)^{1/2}$ , the suffixes  $a$  and  $i$  refer to the media  $W$  and  $V$ ,  $\mathbf{j}_e$  and  $\mathbf{j}'_e$  are known vectors deriving from the sources, and  $\mathbf{i}_i$  and  $\mathbf{j}'_i$  are vectors to be found, which may be thought of as electric and magnetic surface currents. In the next section (pp. 352—361) it is shown that these integral equations are effectively of Fredholm type, and the continuity of any eigen-functions, and of solutions generally, is investigated. The last two stages of the investigation are the proof that the integral equation system has in fact no eigen-functions for finite  $\varepsilon_a, \varepsilon_i, \mu_a$ , and  $\mu_i$ , and the verification that the solution of the inhomogeneous integral equation system yields a solution of the original diffraction problem. The proof that there are no eigen-functions follows fairly easily, using the radiation condition for electromagnetic fields developed by the author previously (loc. cit. sup.). The proof that the integral equations solve the original problem is more lengthy. Finally, the author deals separately with the case of „perfect reflection“, in which  $\varepsilon_i = \infty$ , and in which on  $F$  the boundary condition is  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ . A special substitution, in terms of magnetic surface currents only, leads to an integral equation

$$\mathbf{j}'_R = -2\mathbf{j}'_e - (2\pi)^{-1} \int_F \mathbf{n} \times (\mathbf{j}'_R \times \nabla \varphi) dF,$$



which again is effectively of Fredholm type. The remainder of the argument, leading to the existence theorem, has however to be modified, as compared with the previous discussion, since in this case the possibility of the integral equation having eigen-functions cannot be excluded.

*F. V. Atkinson.*

**Müller, Claus:** Randwertprobleme der Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Math. Z. 56, 261—279 (1952).

Let  $G$  be a regular simply-connected region bounded by a surface  $F$  which is three times continuously differentiable. The author solves two boundary-problems requiring an electromagnetic field  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ , with harmonic time-dependence, to be such that the tangential component of  $\mathfrak{E}$  takes prescribed values on  $F$ . In the first case the field is to exist inside  $G$ , in the second outside  $G$  and to satisfy a radiation condition at infinity. The method, requiring the study of certain integral equations over  $F$ , is broadly similar to that used by the author for the exterior problem in the scalar case (this Zbl. 46, 107). Postulating that the prescribed boundary values have differential coefficients satisfying a Hölder condition, it is shown that the exterior problem is always soluble uniquely, while for the interior problem the boundary-values must be orthogonal to certain eigen-vector-functions. The exterior problem is also covered, for a special class of boundary-values, by the case of „perfect reflection“ considered at the end of a previous paper of the author (see the preceding review).

*F. V. Atkinson.*

**Müller, R. und E. Ruch:** Die elektromagnetischen Eigenschwingungen in einem Quader bei endlicher Leitfähigkeit der Hülle. Z. angew. Phys. 4, 254—258 (1952).

The authors consider the electromagnetic modes of a cavity of the form  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$ , taken to be bounded by metallic walls. They first assume the walls to be perfectly conducting, and note that to any set of positive integers  $l$ ,  $m$ ,  $n$  there correspond two linearly independent modes of the form  $H_x = A_x \sin(\pi l x/a) \cos(\pi m y/b) \cos(\pi n z/c)$ , etc. Two such modes are then used as a starting-point for a study, by perturbation methods, of the case in which the walls are imperfectly conducting. The imperfect conductivity is represented by replacing the boundary condition  $[\mathfrak{E} n] = 0$  by  $[\mathfrak{E} n] + \frac{1}{2}(1 - j) d \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$ , where  $d$  is the skin-depth-factor for the frequency in question. The authors find expressions for the perturbed amplitude-vectors ( $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ ); they also estimate the perturbed frequencies, with agreement with known expressions for the cases  $a = b$  and  $a = b = c$ .

*F. V. Atkinson.*

• **Middleton, W. E. Knowles:** Vision through the atmosphere. Toronto: University of Toronto Press; London: Oxford University Press 1952. XIV, 250 p. 68 s.

**Schagen, P., H. Bruining and J. C. Francken:** A simple electrostatic electron-optical with only one voltage. Philips Research Rep. 7, 119—130 (1952).

In einem elektronenoptischen System aus zwei konzentrischen sphärischen Elektroden ist das Problem der Bahnberechnung mathematisch identisch mit dem Keplerproblem. Für den Fall, daß die Außenelektrode als Kathode (etwa als Photokathode eines Bildwandlers) verwandt wird, werden die Abbildungseigenschaften des Systems durch Verlängerung der an der Anode angelegten Bahntangenten berechnet. Die zur Kathode konjugierte Bildfläche ist ebenfalls eine mit den beiden Elektroden konzentrische Kugelfläche. Wegen der praktischen Notwendigkeit, die Anode mit einer Lochblende zum Durchlassen der abbildenden Elektronen zu versehen, wird jedoch das kugelsymmetrische elektrostatische Feld verzerrt. Unter der Annahme, daß diese Verzerrung elektronenoptisch dasselbe bewirkt wie eine zusätzliche Lochblendenlinse, werden die Abbildungseigenschaften des Systems mit Anodenblende näherungsweise berechnet.

*F. Lenz.*

**Seman, O. I.:** Die Aberrationen von elektronenoptischen Systemen mit Oberflächenladungen im optisch wirksamen Teil des Feldes. Žurn. techn. Fiz. 22, 1581—1591 (1952) [Russisch].

Theoretische Untersuchung über die Bildfehler rotationssymmetrischer elektronenoptischer Systeme, in welchen leitende, für Elektronen durchlässige elektrisch aufgeladene Rotationsflächen („Netze“) angeordnet sind. Die elektrischen Felder in elektronenoptischen Abbildungssystemen, welche normalerweise längs der gesamten Strahlachse der Potentialgleichung genügen oder allenfalls in Kathodennähe kontinuierlich veränderliche Raumladungen enthalten, werden durch solche Netze in zwei oder mehr Feldteile zerlegt, die jeder für sich die Potentialgleichung erfüllen. Da die Potentialgleichung aber in den Punkten der Netzflächen selbst im allgemeinen nicht gilt, gehorchen Systeme mit Netzen im allgemeinen nicht den bekannten für Potentialfelder abgeleiteten Gesetzen. Die Hoffnung, auf diese Weise rotationssymmetrische elektronenoptische Systeme

mit verschwindendem oder zumindest stark reduziertem Öffnungsfehler schaffen zu können, hat schon mehrere Arbeiten über derartige Netzlinsen ins Leben gerufen. Die praktische Bedeutung für die Elektronenoptik dürfte aber gering sein, da zusammenhängende Folien (also Netze ohne Löcher) für Elektronen keineswegs durchlässig sind, während in Netzen mit Löchern, und seien sie noch so feinmaschig, in den Löchern, d. h. überall, wohin die zur Abbildung beitragenden Elektronen überhaupt gelangen können, das Feld eben doch der Potentialgleichung genügt. *F. Lenz.*

**Straškevič, A. M.:** Die Grundbeziehungen der relativistischen Elektronenoptik nichtaxialsymmetrischer elektrostatischer Felder. *Žurn. techn. Fiz.* 22, 1848—1856 (1952) [Russisch].

In der Bewegungsgleichung für geladene Teilchen in elektrostatischen Feldern werden die Ableitungen der Teilchenkoordinaten nach der Zeit durch solche nach der  $z$ -Koordinate eines kartesischen Systems ersetzt. Man erhält dadurch ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das die Berechnung der Teilchenbahnen (etwa durch Iteration) gestattet. Verschiedene einfache Grenz- und Sonderfälle (kinetische Teilchenenergie klein bzw. groß gegen Ruhenergie, ebene bzw. nur schwach gegen die  $z$ -Achse geneigte Teilchenbahnen, Felder mit einer, zwei oder vier die  $z$ -Achse enthaltenen Symmetrieebenen, rotationssymmetrische Felder) werden diskutiert. Allgemeine Aussagen über die Fokussierung von Teilchenstrahlen gelingen nur für Systeme mit speziellen Symmetrieeigenschaften, achsennahe Bahnen und schwache Bahnkrümmungen. *F. Lenz.*

### Relativitätstheorie:

● **Meščerskij, I. V.:** Arbeiten zur Mechanik der Körper von veränderlicher Masse. Mit einem Vorwort und einer einleitenden Arbeit von A. A. Kosmodem'janskij. (Klassiker der Naturwissenschaften. Mathematik, Mechanik, Physik, Astronomie.) 2. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 280 S. R. 6,— [Russisch].

Die vorliegende zweite Auflage ist gegenüber der ersten (dies. Zbl. 41, 525) geringfügig erweitert: Die Einleitung ist etwas ausführlicher gehalten; außerdem ist der Auszug aus einem Vortrag vor dem X. Kongreß Russischer Naturforscher und Ärzte in Kiev (1898) neu aufgenommen worden.

● **Levi-Civita, Tullio:** Le problème des  $n$  corps en relativité générale. (Mém. Sci. math., Nr. 116). Paris: Gauthier-Villars 1950. 111 p.

This excellent monograph on the  $n$ -body problem in the general theory of relativity was prepared about ten years ago (1940), but its appearance now is none the less timely for those who have worried themselves with one or another aspect of the problem. Its major achievements are two: a derivation of the equations of motion of  $n$  point masses, free from the subtle errors besetting most of the standard treatments; and a careful discussion of the possible contributions, in the Einsteinian approximation, of the finite size and internal constitution of the bodies involved. While the treatment of this latter topic does not profess to the attainment of complete rigor, it is shown on the basis of plausible hypotheses that the effects of the finite extension of the bodies may be absorbed into the Newtonian terms by a first-order redefinition of their masses. A short historical preface is followed by a lucid although concise chapter on the fundamental concepts and equations of the general relativity theory of gravitation. Chapter II examines the structure of the differential equations of the gravitational and motional fields for a system of incoherent masses, and shows that they can in fact be written in normal form, to which the Cauchy-Kowalewski existence theorem applies. This is followed by a careful development of the standard successive approximation method, in steps of relative order  $(v/c)^2$ , to the stage required to bring out the Einsteinian effects in the motion. After a hurried side-glance at the interior problem, Levi-Civita marches on to the nub of the matter in chapter V, „Reduction to ordinary differential equations“. Here the author avoids the conceptual and computational pitfalls into which De Sitter, Chazy and others — among

them, upon occasion, Levi-Civita himself — have plunged. Here too is a reasoned justification for Marcel Brillouin's „Principle of effacement“, whereby the contribution of a body to the gravitational field may be ignored on computing its own equations of motion. The monograph ends with a detailed analysis of the 2-body problem (perihelion advance and motion of the center of mass), into which is incorporated a specific account of the absorption into the Newtonian mass of contributions to the field due to the finite extension of the gravitating bodies.

*H. P. Robertson (Math. Rev. 13, 499).*

**Popovici, Andrei:** Sur les équations unitaires de la gravitation et de l'électromagnétisme. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 665—670, ungar. und russische Zusammenfassgn. 671, 672 (1952).

Exposé succinct d'un essai de théorie „unitaire“ utilisant une représentation par un système hypercomplexe et faisant intervenir d'une manière essentielle les „sources“ du champ. *A. Lichnerowicz.*

### Quantentheorie:

**Jordan, P.:** Algebraische Betrachtungen zur Theorie des Wirkungsquantums und der Elementarlänge. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 99—119 (1952).

In der Absicht, Formalismen aufzufinden, die eine Erweiterung der Quantenmechanik in Richtung auf eine Theorie der Elementarlänge ermöglichen, bemerkt Verf. zunächst, daß die Wahrscheinlichkeit, den Wert  $\beta$  von  $b$  zu beobachten, nachdem zuvor der Wert  $\alpha$  von  $a$  festgestellt ist, gleich der Spur des Produktes der jenen Eigenwerten entsprechenden idempotenten Hermiteischen Matrizen ist. Damit wird eine Übersetzung des Matrizenkalküls in die Sprache der nicht-kommutativen Ringe nahegelegt, die jedoch wegen der Wedderburnschen Sätze bei Ringen mit endlicher Basis nur eine Übersetzung bleibt. Die Bemerkung, daß idempotente Hermiteische Matrizen mit linearen Vektorräumen und dadurch zur projektiven Geometrie in Beziehung gesetzt werden können, gewinnt Bedeutung beim Versuch, die auf Rechtsideale anwendbare Theorie der Dedekindschen Verbände zur Verallgemeinerung des Quantenformalismus heranzuziehen; denn nach J. v. Neumann führt ein solcher Verband unter gewissen Nebenbedingungen auf eine projektive Geometrie, was für die Anwendbarkeit jener Wahrscheinlichkeitsformel notwendige Voraussetzung ist. Da jedoch dieses Ausweichen in eine „Quantenlogik“ bei unendlichen Matrizen neue Schwierigkeiten bietet, untersucht Verf., ob ein neuer Quantenformalismus aus dem Verzicht auf das Assoziativgesetz der Multiplikation oder gar die Multiplikation selbst zu erwarten ist, und berichtet in diesem Zusammenhange über seine mit J. v. Neumann und E. Wigner angestellten Untersuchungen der Moduln, in denen nur noch ein Potenzieren außer dem Subtrahieren vorausgesetzt wird. Aber auch hier erwiesen sich die nichttrivialen Fälle solcher Formalismen als zu eng für den vorgesehenen Zweck. So bleibt als letzter algebraischer Versuch übrig, die Abschwächung der Voraussetzungen auf die Addition zu verlagern, wie es in der Theorie der Fastringe geschieht. Verf. rechnet jedoch auch damit, daß es weniger auf algebraische Verallgemeinerung denn auf solche der Limesbildung ankommen mag, wie sie durch J. v. Neumanns Untersuchungen über Schiefringe mit unendlicher Basis vorgezeichnet sind.

*E. Kähler.*

● **Erdélyi, I. L.:** The examination and correct interpretation of Planck's constant  $h$ . Sao Paulo: Livraria International 1952. 76 p. \$ 2,—.

**Fantappiè, Luigi:** Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 285—290 (1952).

L'A. montre que tout opérateur fonctionnel linéaire n'est pas susceptible de représenter une grandeur physique en mécanique quantique. En effet pour être acceptable un opérateur doit pouvoir être associé à une grandeur qui soit une observable et présente en outre un caractère objectif indépendant de l'observateur. Ces conditions permettent d'établir une équation fonctionnelle caractérisant la classe des opérateurs représentant les grandeurs physiques. *G. Petiau.*

**Viguier, Gabriel:** L'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique linéaire. Bull. Inst. Politechn. Jassy 4, 226—232 (1949).

Verf. betrachtet einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator, dessen Verhalten durch die Schrödingergleichung

$$(1) \quad \Delta\psi - (8\pi^2 m/h^2) V\psi - (4\pi i m/h) \partial\psi/\partial t = 0$$



beschrieben wird. Mit  $V = 2\pi^2 m \omega^2 x^2$  werden stationäre Zustände untersucht. Unter Verwendung geeigneter Substitutionen geht (1) über in die gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(2) \quad d^2 a / dq^2 + (\lambda - q^2) a = 0.$$

(2) besitzt genau dann von der trivialen verschiedene, in den Endpunkten eines Intervalls verschwindende Lösungen, wenn  $\lambda$  mit einem Eigenwert zusammenfällt, d. h., wenn  $\lambda = 2k + 1$  ( $k$  ganz) ist. Lösungen von (2) sind  $e^{-q^2/2} H_k(q)$ , wobei  $H_k(q)$  das Hermitesche Polynom vom Grade  $k$  bedeutet. Die Eigenschaften der Hermiteschen Polynome können durch solche geometrischer Art, wie sie den zu (2) gehörenden Riccatischen Differentialgleichungen eigen sind, gedeutet werden. Die Lösungen solcher Riccatischen Differentialgleichungen werden außerdem noch mit Hilfe der Theorie der verallgemeinerten Evoluten geometrisch interpretiert. Der Überführung einer Riccatischen Differentialgleichung von einer kanonischen Form in eine andere entspricht ein Übergang von einem Energieniveau des Oszillators zu einem anderen. Bildet man nach dem Vorgang von G. Darboux Ketten von homogenen, linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, so kann jedes Glied einer solchen Kette physikalisch als ein Energieniveau gedeutet werden. Damit gelingt es dem Verf., die physikalische Erscheinung der Quantifikation auf unterschiedliche Weise geometrisch zu deuten.

W. Quade.

**Ortiz Fornaguera, R.:** Funktionalanalysis in Beziehung zum Diracschen Formalismus für lokalisierbare dynamische Systeme. *Revista Acad. Ci. Madrid* **46**, 315—346 (1952) [Spanisch].

The paper is devoted to a very detailed but elementary discussion of the use of space-like surfaces in quantum theory of fields, mainly in the line of the general paper of Dirac, this Zbl. **33**, 93.

L. van Hove (M. R. **16**, 77).

**Sokolov, A. A., N. P. Klepikov und I. M. Ternov:** Zur Quantentheorie des Energieverlustes von Elektronen im Magnetfeld. *Žurn. éksp. teor. Fiz.* **23**, 632—640 (1952) [Russisch].

Die Untersuchung behandelt den Energieverlust schneller Elektronen durch Ausstrahlung im Magnetfeld. Mit den herkömmlichen Mitteln der Quantentheorie der Strahlung wird gezeigt, daß sich die Quantenkorrekturen der Strahlungsintensität zum klassisch berechneten Wert verhalten wie die mit der Ordnung der ausgestrahlten Oberwelle multiplizierte de Broglie-Welle des Elektrons zum Radius der Bahn. Dasselbe gilt für die Korrekturen zur Frequenz. Damit werden Ergebnisse einer Arbeit von Parzen (dies. Zbl. **43**, 423) berichtigt, nach der sehr viel größere Quantenkorrekturen zu erwarten gewesen wären.

W. Humbach.

**Dempster, J. R. H.:** Note on the relation between Feynman's formulation of scattering problems and the Born approximation. *Canadian J. Phys.* **29**, 66—71 (1951).

**Votruba, Václav:** Pair production by gamma-rays in the field of an electron. *Acad. Tchéque Sci., Bull. internat., Cl. Sci. math. natur-méd.* **49** (1948), 19—49 (1950).

Die Paarzeugung aus  $\gamma$ -Strahlen an einem Elektron auf der Grundlage der (nicht kovarianten) Quantentheorie der Wellenfelder wird untersucht. Gegenüber früheren Berechnungen von Borsellino auf der Grundlage der Diracschen Theorie wird bei diesem Verfahren die Ununterscheidbarkeit der Elektronen und damit auch ihr gleichzeitiger Austausch von vornherein mitberücksichtigt. Bei den durchgeführten Rechnungen auf der Grundlage der Bornschen Näherung stellte sich heraus, daß die durch den Austausch bedingten Abweichungen sich in erster Linie dann am stärksten bemerkbar machen, wenn die Impulse vom gestoßenen Elektron und dem erzeugten Elektronenpaar von gleicher Größenordnung sind.

W. Macke.

**Garibjan, G. M.:** Bremsstrahlung und Entstehung von Paaren im Feld eines Elektrons (allgemeiner Fall). *Akad. Nauk. Armjan. SSR, Izvestija, fiz.-mat. estest. techn. Nauki* **5**, Nr. 3, 1—8 u. armen. Zusammenfassg. 8—9 (1952) [Russisch].

● **Beckerley, J. G.** (edited by): Annual review of nuclear science. Vol. I. Stanford, Calif.: Annual Reviews Inc. 1952. 645 p. 6,00 dollars.

**Dolginov, A. Z.:** Die Winkelverteilung der Konversionselektronen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz.* **16**, 322—330 (1952) [Russisch].

Es handelt sich um eine Übersicht über das Gebiet der Winkelkorrelationen.

die Konversionselektronen als Teilstrahlung enthalten. Zuerst wird die Winkelverteilung des Konversionselektrons angegeben und hierauf die Winkelkorrelation dieser Strahlung mit  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung erörtert. Erwähnt werden noch die Mehrfachkorrelation, die Korrektur bezüglich der magnetischen Wechselwirkung zwischen Kern und Elektronenschale und zwei aufeinander folgende Konversionsstrahlungen aus derselben Elektronenschale.

*O. Hittmair.*

## **Bau der Materie:**

Bernal, M. J. M. and S. F. Boys: Electronic wave functions. VII: Methods of evaluating the fundamental coefficients for the expansion of vector-coupled Schrödinger integrals and some values of these. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **245**, 116—154 (1952).

(Teil VI s. dies. Zbl. **46**, 229.) Die Lösung der einzelnen Matricelemente der Schrödinger-Gleichung mit antisymmetrischen, vektorgekoppelten Funktionen ist durch eine Entwicklung in Termen von Ein- und Zweielektronenintegralen möglich. Die zugehörigen Koeffizienten sind zwar explizit definiert, müssen aber zur praktischen Benutzbarkeit tabelliert vorliegen. Nach einer Wiederholung der Terminologie des zugrunde liegenden Verfahrens der „besten Berechnungsmethoden“ werden sehr ausführliche Tabellen der „Vector-Coupling“-Koeffizienten  $X$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\eta$  und  $Q$  angegeben. In Verbindung mit diesen Tabellen wird über einzelne wichtige Integralentwicklungen berichtet, die den geschlossenen Elektronenschalen  $s^2 S^1$  und  $p^6 S^1$  zugeordnet sind.

*H. J. Kopineck.*

Jucis, A. P.: Anwendung der Methode der unvollständigen Trennung der Variablen auf zwei äquivalente  $p$ -Elektronen. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **23**, 357—370 (1952) [Russisch].

Bei der „unvollständigen Trennung der Variablen“ — eine Methode der Fock-Petrašen-Veselov-Theorie — wird die totale Energie eines Atoms nach der Integration über die Winkelanteile der Wellenfunktionen durch Integrale über die Radialanteile ausgeführt. Da diese Integrale recht kompliziert sind, wurden sie eingehend untersucht und ihr Verhalten systematisch studiert. Die Integrale, die den Teil des Hamilton-Operators beinhalten, der den kinetischen Energieanteil ergibt, und die Austauschintegrale sind nur in wenigen Fällen einfach zu lösen. Es werden Rechenverfahren angegeben, die hier eine wesentliche Hilfe bedeuten. Die Untersuchungen werden dadurch vervollständigt und abgerundet, daß numerische Rechnungsergebnisse vorgelegt werden können, die nach der genannten Methode für He,  $\text{Li}^+$  und  $\text{Be}^{++}$  mit den  $2p^2$  Konfigurationen gewonnen worden sind. Die Ergebnisse weisen darauf hin, daß die Methode der „unvollständigen Trennung der Variablen“ eine wesentliche Verbesserung bedeutet.

*H. J. Kopineck.*

Jucis, A. P.: Verallgemeinerung der Theorie der unvollständigen Trennung der Variablen auf den Fall mehrfach valenter Atome. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **23**, 371—380 (1952) [Russisch].

Zahlreiche Untersuchungen des Verf. an zweiwertigen Atomen haben gezeigt, daß die Anwendung der Methode der „unvollständigen Trennung der Variablen“ die theoretischen Energiewerte im Vergleich zu denen, die bei Anwendung der Methode der „vollständigen Trennung der Variablen“ gewonnen werden, erheblich verbessert. Das bedeutet, daß dieses Verfahren eine wesentliche Präzisierung der Verfahren der quantenmechanischen Atomberechnung darstellt. Die Verallgemeinerung der zugehörigen Theorie für den Fall mehrfach valenter Atome ist daher sehr naheliegend. Eine lineare Kombination der Determinanten der Elektronenfunktionen, die die Wellenfunktion des gesamten Atoms darstellt, wird so transformiert, daß die Quantenzahlen der inneren Elektronen in die Unterdeterminanten der Determinanten, die Quantenzahlen der Valenzelektronen in die zugehörigen algebraischen Komplemente gerückt werden. Mit dieser so umgeformten Wellenfunktion des gesamten Atoms kann in bekannter Weise die totale Energie des Atoms berechnet werden. Die formalen Ergebnisse werden so geschrieben, daß sie mit dem Fall verglichen werden können, bei dem die Variablen der inneren Elektronen vollständig getrennt sind und auf die Valenzelektronen die Näherung der „unvollständigen Trennung der Variablen“ angewendet ist. Die Untersuchungen sollen weiter fortgesetzt werden.

*H. J. Kopineck.*

**Pyarelal and P. L. Bhatnagar:** A note on energy levels of hydrogen atom with finite size nucleus. *Proc. nat. Inst. Sci. India* **18**, 187—191 (1952).

Die unrelativistische Schrödinger-Funktion des Wasserstoffatoms wird für den Fall des undurchdringbaren Wasserstoffatoms untersucht. Anders als im relativistischen Fall enthält der sonst fast nie verwendete bei  $r = 0$  irreguläre Teil der Wellenfunktion eine logarithmische Divergenz. Durch die Verkleinerung des dem Elektron zur Verfügung stehenden Raumes wird die Energie aller Zustände etwas angehoben.

*W. Humbach.*

**Sokolov, N. D.:** Zur Theorie der spektroskopischen Erscheinungen einer Wasserstoffbindung. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **23**, 392—403 (1952) [Russisch].

In einer früheren Arbeit des Verf. wurde die Wasserstoffbindung quantenmechanisch interpretiert. Aus diesen Rechnungen folgt, daß für die Eigenschaften der Wasserstoffbindung die interatomaren Abstände sehr wesentlich sind. Eine weitere bekannte Folgerung ist, daß die dynamische Wechselwirkung der Bindung  $A-H$  und  $H \cdots B$  im Komplex  $A-H \cdots B$  nicht auf die unmittelbare Wechselwirkung der Atome  $A$  und  $B$  zurückzuführen ist, sondern komplizierteren Charakter hat. Aus der mathematischen Präzisierung dieser Aussage können die notwendigen Bedingungen abgelesen werden, die für die Verschiebungen der charakteristischen Frequenz der Bindung  $A-H$  erforderlich sind.

*H. J. Kopineck.*

**Sokolov, N. D.:** Quantenmechanische Berechnung der Schwingungsfrequenzen eines Komplexes mit Wasserstoffbindung. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **23**, 404—411 (1952) [Russisch].

Die quantenmechanische Lösung des Problems der Schwingungen der Bindung  $A-H$  im linearen Komplex  $A-H \cdots B$  unter der Voraussetzung des Fehlens von Restladungen auf dem Atom  $B$  führt zu dem Ergebnis, daß dem wahrscheinlichsten optischen Übergang ( $v = 0 \rightarrow v = 1$ ,  $m \rightarrow m$ ) eine Frequenz zugeordnet ist, deren Wert sich nur um höchstens 20% von dem unterscheidet, der nach den klassischen Rechnungsmethoden erhalten wird. Neben der sehr intensiven Hauptbande muß das Spektrum der Wasserstoffbindung eine Reihe schwächerer Banden aufweisen, die sowohl zur kurzen als auch zur langen Seite der Hauptbande verschoben sind.

*H. J. Kopineck.*

**Schlögl, F.:** Eine quantenmechanische Behandlung der  $F_2$ -Bindung. *Z. Phys.* **131**, 505—527 (1952).

Das von Heisenberg für zentralsymmetrische Felder angegebene „Lückenmodell“ wird auf symmetrische Zweizentrenpotentiale ausgedehnt. Da man dann eine Wellengleichung für die „Lücken“, d. h. die Elektronen, die an einer vollen Schale fehlen, erhält, bedeutet das eine Vereinfachung für die quantenmechanische Behandlung von symmetrischen Molekülen der Elemente am rechten Rand des Periodischen Systems. Allerdings erhält man auf diese Weise nur Termdifferenzen und muß den Grundzustand nach anderen Methoden berechnen (was relativ einfach ist, da man es dann immer mit den höchstsymmetrischen Eigenfunktionen zu tun hat). — Anwendung auf das  $F_2$ -Molekül, bei dem man an Stelle eines 10-Elektronen-Problems ein Zweielektronenproblem erhält.

*H. Koppe.*

**Kopineck, Hermann-Josef:** Zweizentrenwechselwirkungsintegrale. III: Integrale mit  $2p$ - und wasserstoffähnlichen  $2s$ -Funktionen. *Z. Naturforsch.* **7a**, 785—800 (1952).

**Kopineck, Hermann-Josef:** Quantentheorie des  $N_2$ -Moleküls. I: Problemstellung und Grundlagen der durchzuführenden Untersuchungen. Das  $N_2$ -Molekül als Sechselektronenproblem. *Z. Naturforsch.* **7a**, 22—33 (1952).

Mit Hilfe der Slaterschen Theorie der lokalisierten Valenzen wird das Stickstoffmolekül als Sechselektronenproblem behandelt, indem die  $1s$ - und  $2s$ -Elektronen vernachlässigt werden. Es zeigt sich, daß in dieser Form der Näherung wegen des  $\sigma$ -Elektroneneinflusses noch keine Einzelheiten über den Bindungsvorgang innerhalb



der Dreifachbindung erhalten werden können. Immerhin ergibt sich eine maximale Dissoziationsenergie von  $-7,55$  eV bei einem Kernabstand von  $1,196$  Å, wobei die experimentellen Werte betragen:  $-9,764$  eV und  $1,095$  Å. Bei der Durchführung der zahlreichen Permutationen im Rahmen dieser Theorie werden nur Transpositionen berücksichtigt. Es zeigt sich nämlich, daß die Vernachlässigung von Transpositionen im Nennerintegral des Energieausdrucks  $E = (\psi, H \psi) / (\psi, \psi)$ , nach Variation der effektiven Kernladungszahl der verwendeten Slaterfunktionen, sich etwa 10mal so tiefe Energieminima ergeben, wie der experimentell zu erwartende Wert. Erst die Mitnahme der Transpositionen auch in  $(\psi, \psi)$  ergab die obigen Werte, wobei im einzelnen gezeigt wird, daß der Einfluß höherer Permutationen nur 1% beträgt.

H. Preuß.

Brickstock, A. and J. A. Pople: The spatial correlation of electrons in atoms and molecules. II. Two-electron systems in excited states. *Philos. Mag.*, VII. Ser. 43, 1090—1098 (1952).

• Stuart, H. A.: Die Struktur des freien Moleküls: allgemeine physikalische Methoden zur Bestimmung der Struktur von Molekülen und ihre wichtigsten Ergebnisse. (Die Physik der Hochpolymeren, Bd. I.) Berlin, Göttingen und Heidelberg: Springer-Verlag 1952. XXI, 609 S. DM 69,—.

Der zunächst theoretische Begriff des „freien Moleküls“ läßt sich nicht immer und ohne weiteres für praktische Untersuchungen wie z. B. Strukturbestimmungen übernehmen. Die mit ihm verbundenen Vorstellungen bedürfen daher — beim Übertragen auf die Praxis, auf das Experiment — jeweils einer Rechtfertigung der Voraussetzungen. Das vorliegende Buch, das der erste Band der Serie „Die Physik der Hochpolymeren“ ist, führt in klarer Weise an diesen Begriff heran. Das Studium des Werkes läßt u. a. erkennen, welch große Lücke in der deutschsprachigen Literatur der Verf. in so verdienstvoller Weise geschlossen hat. Das Material, das auf 609 Seiten zusammengetragen worden ist, ist erdrückend groß. Das Hauptgewicht der Darstellungen ist auf das Experiment, d. h. auf die experimentellen Ergebnisse und auf die Untersuchungsmethoden gelegt worden. Die theoretischen Grundlagen sind in knapper Form, manchmal vielleicht in sehr knapper Form, dargestellt. Nach dem einleitenden Kapitel über die Kräfte, die den inneren und zwischenmolekularen Raum beherrschen, werden die Methoden beschrieben, mit denen Größe, Form und Struktur der Moleküle bestimmt werden können. Hier wie auch an späteren Stellen ist es beachtenswert, daß jüngste Forschungsmethoden geschildert werden. So ist z. B. der Mikrowellenspektroskopie ein eigener Paragraph eingeräumt worden. Die folgenden Kapitel betreffen die Beschreibung sowie die Erforschungsmethoden der speziellen Eigenschaften verschiedenartiger Moleküle, wie z. B. die innere Beweglichkeit, die dielektrische Elektrizitätskonstante, die elektrische Doppelbrechung. Das den Abschluß bildende Kapitel über die Lichtabsorption und ihr Zusammenhang mit der Konstitutionsforschung ist vielleicht eines der reizvollsten des ganzen Buches. Das Buch, dem der Verlag ein gediegenes Äußeres und Inneres gegeben hat, besitzt über den Charakter eines Lehrbuches hinaus die Eigenschaft, ein vorzügliches Nachschlage- und Orientierungswerk zu sein. 129 zum Teil sehr umfangreiche Tabellen, deren Einzeldaten mit sehr viel Liebe zusammengetragen worden sind, geben dem Inhalt eine sehr gute „zahlenmäßige Abrundung“.

H. J. Kopineck.

March, N. H.: Theoretical determination of the electron distribution in benzene by the Thomas-Fermi and the molecular-orbital methods. *Acta. crystall.* 5, 187—193 (1952).

The present paper shows that Hund's solution of the Thomas-Fermi equation can be extended to molecules other than those with axial symmetry. Density contours in the plane of the benzene ring and in a parallel plane,  $0,35$  Å above it, were determined by both methods. According to m. o. theory the  $\pi$  electrons contribute little to the density in the parallel plane except above the carbon atoms. These results reported here appear to be in agreement with X-ray data.

J. Jacobs.

Fischer, Inga: The approximations of molecular theory tested on LiH and BeH<sup>+</sup>. *Ark. Fys.* 5, 349—376 (1953).

Aus Berechnungen, die sowohl mittels der LCAO (linear combination of atomic orbitals)-Näherung der MO (molecular orbital)-Methode als auch mittels der Heitler-London-Slater-Pauling-Methode in einfacher Form wie auch in der Form, die die Ionenterme einschließt, durchgeführt worden sind, werden folgende Schlüsse gezogen: Nahezu korrekte Werte der molekularen Bindungsenergien und der Elektronenverteilungen können dadurch erhalten werden, daß zu den Rechnungen entweder Wellenfunktionen benutzt werden, die alle Elektronen des Mole-

küls unter Wahrung der Orthogonalitätsbedingungen enthalten, oder aber durch Wellenfunktionen, die nur die Valenzelektronen berücksichtigen. Im letzten Fall werden die  $s$ -Elektronen für  $n > 1$  durch knotenlose Wellenfunktionen beschrieben. Die Rechnungen zeigen weiterhin, daß die Elektronenverteilungen der Wellenfunktionen sich in dem Maße ändern, wie die Kernabstandswerte  $R$  geändert werden. Die durch ein Variationsverfahren bestimmten  $R$ -Werte sind im allgemeinen in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Es kann daher erwartet werden, daß immer dann, wenn der Kernabstand  $R$  aus Experimenten entnommen wird, eine vernünftige Elektronenverteilung errechnet werden kann. In Analogie zur Paulingschen Bedingung des maximalen Überlappens kann daher auf eine Bedingung „maximaler Durchdringung“ geschlossen werden.

*H. J. Kopineck.*

**Glaubermann, A. E. und V. J. Dorogań:** Zum Problem des Energieaustauschs zwischen der fortschreitenden Bewegung und der molekularen Schwingung und Rotation. II. *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **23**, 430—439 (1952).

Verf. betrachtet das Problem des Energieaustausches beim Zusammenstoß eines Atoms mit einem zweiatomigen Molekül nach dem Schema der vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. **49**, 143). Die Wahrscheinlichkeiten für die Erregung von Schwingungszuständen des Moleküls werden berechnet und mit dem Experiment verglichen.

Zusammenfassg. des Autors.

**Cotter, J. R.:** Conduction of heat in a monatomic gas. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* **55**, Nr. 1, 28 S. (1952).

**Kihara, Taro:** The mathematical theory of electrical discharges in gases. *Reviews modern Phys.* **24**, 45—61 (1952).

Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bildet die Boltzmannsche Stoßgleichung für Ladungsträger in Gasen bei Einwirkung eines äußeren elektromagnetischen Feldes. Der Anteil der Stoßgleichung, der die Änderung der Verteilungsfunktion durch Stoßprozesse angibt, kann unter Vernachlässigung der Wechselwirkung der Ionen untereinander durch ein Stoßintegral ausgedrückt werden, in das der Wirkungsquerschnitt für den Stoß Ion—Gasmolekül mit eingeht. Erst die Kenntnis der Wirkungsquerschnitte für diese verschiedenen Stoßprozesse ermöglichen eine weitergehende mathematische Behandlung. Für diese Stoßprozesse, nämlich für den elastischen Stoß, die Anregung und die Ionisation durch ein Ion, wählt der Verf. Modelle mit einem mathematisch einfachen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt. Wenn auch diese Modelle den tatsächlichen Sachverhalt nur angenähert wiedergeben, so ermöglichen sie aber eine einfache und geschlossene mathematische Theorie der Bewegung von Ladungsträgern in Gasen.

*K. G. Müller.*

**Allis, W. P. and Sanborn C. Brown:** High frequency electrical breakdown of gases. *Phys. Review, II. Ser.* **87**, 419—424 (1952).

**Champion, K. S. W.:** The theory of gaseous arcs. I: The fundamental relations for the positive columns. II: The energy balance equation for the positive columns. *Proc. phys. Soc., Sect. B* **65**, 329—344, 345—356 (1952).

**Spivak, G. V. und E. L. Stoljarowa:** Über die Phasenübergänge in einem sich bildenden Plasma. *Vestnik Moskovsk. Univ.* **7**, Nr. 5 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 3), 31—39 (1952) [Russisch].

**Stratonovič, R. L.:** Wellen in einem zylindrischen Plasma. *Vestnik Moskovsk. Univ.* **7**, Nr. 3 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 2), 31—40 (1952) [Russisch].

**Achiezer, A. I. und R. V. Polovin:** Über die Schwingungen des Plasmas im gekreuzten elektrischen und magnetischen Feld. *Žurn. techn. Fiz.* **22**, 1794—1802 (1952) [Russisch].

Es wird die Wechselwirkung eines Elektronenbündels mit langsamen elektromagnetischen Wellen in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern untersucht. Zur Vereinfachung der in ganzer Allgemeinheit nicht lösaren Aufgabe wird angenommen, daß die konstante Ladung und der Strom des Büschels durch schwere Ionen kompensiert werden, die an den hochfrequenten Schwingungen nicht teilnehmen. Gefragt ist nach den Bedingungen, unter denen das Elektronenbündel durch Einfluß der elektromagnetischen Störung instabil wird (unbegrenzt Anwachsen der Fluktuation von Dichte und Geschwindigkeit). Ausgang der Rechnung sind die Maxwell'schen Gleichungen und die Bewegungsgleichung des Elektrons. Eine anschließende Störungsrechnung führt zu einer Dispersionsgleichung, die Frequenz und Wellenzahl der Störung miteinander verknüpfen. Aus ihr ergeben sich zwei Arten der Instabilität: Unbegrenzte Zunahme der Fluktuationen 1. mit der Zeit, 2. im Raum. Es werden verschiedene Spezialfälle genauer untersucht.

*A. Rudloff.*



**Dacev, A. B.:** Über das Auftreten einer Phase beim linearen Stefanschen Problem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 353—356 (1952) [Russisch].

In früheren Arbeiten (dies. Zbl. 41, 121; 45, 274, u. a.) hatte Verf. das allgemeine Stefansche Problem der Eisbildung (Platte endlicher Dicke, beliebige — nicht konstante — Rand- und Anfangswerte) so behandelt, daß er das Vorrücken der Erstarrungsgrenze  $s(t)$  ( $T = 0$ ) aus den beiderseitigen Temperaturgradienten berechnete. Bei der Neubildung einer Phase versagte diese Methode. Zur Ergänzung geht Verf. hier anders vor: er nimmt das (vom Fall konstanter Rand- und Anfangswerte her bekannte) Gesetz  $s(t) = x_0 + \lambda t^{1/2}$  als (angenähert) gültig an und berechnet die zugehörigen Temperaturkurven für das Ende des ersten Zeitintervalls  $\tau$ . Die Plattendicke wird durch  $s$  und einen weiteren Teilungspunkt  $\bar{x}$  gegliedert. Im dritten Abschnitt hat die gewählte Lösung die richtigen Anfangswerte  $\Phi(x)$  und rechten Randwerte  $\varphi_2(t)$ , links aber, wenn bis  $x_0$  verlängert, den Randwert 0. Aus dieser Lösung  $\bar{u}_2$  wird durch lineare Transformation die Lösung  $u_2$  des mittleren Abschnittes ( $s \cdots \bar{x}$ ) erhalten, die näherungsweise den Anfangswert  $\bar{\Phi}$  — einen Mittelwert von  $\Phi(x)$  aus  $(0 \cdots \bar{x})$  — und links den Randwert 0 hat, während für den ersten Abschnitt  $u_1$  rechts den Randwert 0 und links  $\varphi$  hat — einen Mittelwert von  $\varphi_1(t)$  aus  $(0 \cdots \tau)$ .  $u_1$  und  $u_2$  lassen sich angenähert in bekannter Weise durch das Fehlerintegral darstellen; damit findet sich der Parameter  $\lambda$  der Erstarrungsgrenze wieder aus der bekannten transzendenten Gleichung, in die nun  $\varphi$  und  $\Phi$  als Festwerte eingehen. — Leider verwechselt Verf. dann  $\bar{u}_2$  und  $u_2$ , ohne ihr Aneinanderschließen bei  $\bar{x}$  näher zu prüfen. Das wäre nur statthaft, solange sich  $\bar{u}_2$  ( $\bar{x}, \tau$ ) nur sehr wenig von  $\Phi$  unterscheidet. U. T. Bödwadt.

• **Pepinsky, Ray** (edited by): Computing methods and the phase problem in X ray crystal analysis. (The X ray Crystal Analysis Laboratory.) State College, Pa.: The Pennsylvania State College 1952. XVII, 390 p.

23 Kristallographen geben in Einzelberichten eine Übersicht über die verschiedenen, heute aktuellen Rechenmethoden und Maschinen, um aus der dreidimensional-idealperiodischen Elektronendichteverteilung  $\rho(x)$  die im allgemeinen komplexen Fourierkomponenten  $F(b_h)$  der Teilwellen  $\exp(2\pi i(b_h, x))$  von  $\rho(x)$  zu berechnen oder umgekehrt aus den  $F(b_h)$  durch Fourier-Inversen transformation  $\rho(x)$  zu erhalten. Dabei spannt der Vektor  $x$  bzw.  $b$  den dreidimensionalen physikalischen Raum bzw. seinen Fourierraum auf. Der erste Weg ist bekannt bei allen „trial- and error“-Methoden als Prüfstein, ob das angenommene  $\rho$  mit den aus Intensitätsmessung der Röntgenreflexe berechneten  $|F|^2$  übereinstimmt, der zweite Weg wegen des Phasenproblems (man kennt nur  $|F|$ , nicht  $F$ ) oft nicht direkt gangbar. Durch gewisse Nebenbedingungen für  $\rho$  (z. B.  $\rho \geq 0$  und  $\rho \leq \rho_{\max}$  und  $\rho$  aus nach Hartree errechenbaren Elektronenverteilungen in Atomen zusammengesetzt und mit gewissen Symmetrie-Eigenschaften ausgerüstet) gewinnt man zwar Zusatzbedingungen für die  $F(b_h)$  (sog. „inequalities“ nach Harker-Kasper, Karle-Hauptmann, MacGillavry), doch zeigt B. Friedmann am eindimensionalen Beispiel, daß diese nicht immer das Phasenproblem lösen lassen. Die Bedeutung der Pattersonfunktion (= Faltungsprodukt von  $\rho(x)$  mit  $\rho(-x)$  und durch Inversestransformation aus den  $|F|^2(b_h)$  errechenbar) erhellt aus mehreren Beiträgen, diejenige der Fouriertransformation und gewisser Faltungsintegrale aus einer Arbeit von D. Sayre. Neben den optischen Rechenverfahren (optical analogue methods) nach Bragg, Huggins, Bunn, Lipson, Taylor u. a. werden mehrere mehrdimensionale mechanische Fourniersynthetisatoren von Beevers und Robertson und die Lochkartenmethode nach Cox, Jeffrey, Schomaker, Pauling u. a. diskutiert. F. Ordway führt die Fourniersynthese mit einer high-speed digital-Maschine durch (National Bureau of Standards Eastern Automatic Computer „SEAC“). Ray Pepinsky beschreibt seinen X-RAC und S-FAC, der auf elektrischem Wege 400  $F(b_h)$ -Werte auf ein Radar-Oszilloskop gibt, wo man zweidimensional  $\rho(x)$  momentan als Leuchtdichteverteilung sieht und in einer weiteren Einrichtung die Niveaulinien  $\rho(x) = \text{const}$  sofort mit hoher Präzision niedergeschrieben findet. Die Bedeutung dieser Maschine („eines halben Kristallographen“) für die zukünftige Entwicklung der Strukturforschung unterstreichen mehrere im Anhang gegebene Artikel. R. Hosemann.

**Laue, M. v.:** Die Energieströmung bei Röntgenstrahl-Interferenzen in Kristallen. Acta crystall. 5, 619—625 (1952).

Die dynamische Interferenztheorie der Röntgenstrahlen in idealen Kristallgittern wird angewandt auf dicke Kristallplatten und die von Borrmann (1941, 1950) entdeckten Strahlenwege anormal niedriger Absorption berechnet. Je nach benutzter Röntgenwellenlänge und Elektronendichteverteilung im Kristall verlaufen diese Wege parallel oder fast parallel zu den Netzebenen in sanften Schlangenlinien (sog. „Pendellösung“). Nur wenn die Kristalloberflächen schlecht poliert sind, entstehen auf einem hinter der Kristallplatte aufgestellten Röntgenfilm Doppel- oder Dreifachreflexe als Folge der „Mosaikstruktur“. Bei linear polarisierter Primärstrahlung treten im einfachsten, hier allein behandelten Fall zwei zueinander kohärente Doppelwellenfelder im Kristallinneren auf. Dasjenige, dessen elektrische Feldstärke senkrecht steht zur Einfallsebene, wird weniger stark absorbiert. Die austretende Strahlung ist bei genügend dicker Kristallplatte also stets linear polarisiert senkrecht zu dieser Ebene. Nur wenn die beiden Teilstrahlen eines Wellenfeldes gleichstark sind, liegt der Poyntingsche Vektor parallel zu einer Netz-



ebene. Dazu muß der Anregungspunkt des Wellenfeldes in einen Achsenpunkt der Dispersionsfläche fallen.

R. Hosemann.

**Laue, M. v.: Der Teilchenstrom bei Raumgitterinterferenzen von Materiewellen.** Acta crystall. 6, 217 (1953).

Eine frühere Untersuchung über die Energieströmung von Röntgenstrahlen durch einen plattenförmigen Idealkristall (vgl. vorstehendes Referat) wird auf Materieteilchen (Elektronen, Neutronen) ausgedehnt, wobei statt des Poyntingschen Vektors  $\mathcal{S}$  der Maxwellschen Theorie die quantenmechanische Strömungsdichte  $J$  von Schrödinger eingesetzt wird: (1)  $J = (\hbar/2im_0) \cdot (\psi \text{ grad } \psi^* - \psi^* \text{ grad } \psi)$ . Mittelt man wieder wie dort über jeweils eine Gitterzelle, so erhält man statt damals (2)  $\bar{\mathcal{S}} = \frac{c}{8\pi} \sum_h^{\infty} [\mathfrak{D}_h \mathfrak{S}_h^*]$  nun ganz analog (3)  $\bar{J} = \frac{\hbar}{2m_0} \sum_h \psi_h \psi_h^* \mathfrak{k}_h$ ;  $\mathfrak{k}_h = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{b}_h$ , wobei  $\mathfrak{k}_0$  der Wellenvektor der Primärstrahlung im Kristall und  $\mathfrak{b}_h$  der Vektor mit den Millerschen Indizes  $h_1, h_2, h_3$  des reziproken Gitters ist. Da die elektrische und magnetische Feldstärke  $\mathfrak{D}_h$  und  $\mathfrak{S}_h$  orthogonal stehen zum Wellenvektor  $\mathfrak{k}_h$ , so herrscht zwischen (2) und (3) bis auf den Unterschied, daß ersteres vektorielle Wellenamplituden, letzteres skalare Wellenamplituden enthält, in allen wesentlichen Punkten Übereinstimmung. Wird nun eine recht dicke Kristallplatte genommen, so verbleiben im einfachsten, bisher diskutierten Fall (in 2) und (3) nur mehr Summanden  $\mathfrak{k}_0$  und  $\mathfrak{k}_h$  und erzeugen das aus der Röntgenphysik bekannte Doppelwellenfeld exakt definierter Richtung, gegeben durch die Richtung minimaler (anormaler) Absorption.

R. Hosemann.

**Deas, Herbert D.: The diffraction of X-rays by a random assemblage of molecules having partial alignment.** Acta crystall. 5, 542—546 (1952).

Betrachtet wird ein Haufwerk gleichgebauter Moleküle, deren Achsen rotationssymmetrisch um eine Faserachse verteilt sind, die im Pol der Polarkoordinaten  $(u, \vartheta, \varphi)$  liegt, wobei die Orientierungen für  $\vartheta = \alpha$  eine Häufigkeit  $D(\alpha) \sin \alpha$  aufweisen („Fasertextur“). Zugleich sind die Moleküle um ihre eigene Achse willkürlich gegeneinander verdreht. Entwickelt man den Molekülfaktor  $|F|^2$  in Polarkoordinaten  $(u, \vartheta_2, \varphi_2)$  in ein sphärisches harmonisches Polynom

$$(1) \quad |F|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n G_n^m(u) P_n^m(z) e^{im\varphi_2} \quad z = \cos \vartheta_2,$$

wobei die  $P_n^m$  Ferrers assoziierte Legendre-Funktionen sind, so verbleiben nach Mittelung über  $\varphi_2$  nur noch die Summanden  $m=0$ , wobei  $P_n^0$  das Legendresche Polynom  $P_n$  ist:

$$(2) \quad |\bar{F}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^0(u) P_n(z).$$

Mittelt man weiterhin über alle Moleküle mit gleichem  $\alpha$  und vernachlässigt Interferenzeffekte zwischen den Molekülen („Festkörper vom Gastyp“), so lautet die von  $\varphi$  nun unabhängige Intensitätsfunktion  $J$  im Fourierraum, wenn  $\vartheta_1$  der Winkel zwischen einer Molekülachse  $(x, \varphi)$  und der Bezugsachse  $(\vartheta, \gamma)$  ist wegen

$$(3) \quad \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha \cos (\gamma - \varphi)$$

nach Mittelung über  $\varphi$  unter Benutzung des Additionstheorems der Ferrerschen Funktionen

$$(4) \quad J_{\alpha}(u, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^0(u) P_n(y) P_n(x); \quad x = \cos \alpha; \quad y = \cos \vartheta.$$

Entwickelt man auch  $D(\alpha)$  in ein Polynom mittels

$$(5) \quad D(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_k(x); \quad D_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^0 D(x) P_k(x) dx,$$

so erhält man schließlich nach Integration über  $\alpha$  wegen der Orthogonalitätseigenschaft der  $P_k$  allgemeingültig für die gesuchte Intensitätsfunktion

$$(6) \quad J(u, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^0(u) \frac{2}{2n+1} D_n P_n(y).$$

Da  $|F|^2$  bei  $u=0$  ein Symmetriezentrum hat, verschwinden hier alle Summanden mit ungeradem  $n$ . Beispiele für flache Moleküle und solche in Form linearer idealperiodischer Punktgitter werden gegeben.

R. Hosemann.

**Gupta, N. N.: The optical principles of the low angle scattering of X-rays.** Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 379—388 (1952).

An die bekannte Tatsache wird angeknüpft — leider ohne Hinweis auf den Beweisgang — daß die Kleinwinkelstreuung als Reflex 000 anzusehen ist und im Gegensatz zu den übrigen Reflexen  $hkl$  nur von der äußeren Begrenzung der Partikel abhängt. Wenn weiterhin vorgeschlagen wird, die Kleinwinkelstreuung darum nach optischen Prinzipien wie eine Fraunhoferse Beugung zu behandeln, so ist dem zu entgegnen, daß auch die Weitwinkelstreuung und die

Interferenzeffekte zwischen einzelnen Partikeln im Kleinwinkelgebiet bei sinngemäßer Anwendung der Fouriertransformation als Fraunhofersches Analogon behandelt werden können. Verf. errechnet mittels Polarkoordinaten den Gestaltfaktor einer Kugel und unendlich dünnen Kreisscheibe. Die sehr umständliche Rechnung führt aber nur auf Potenzreihen und nicht auf die bekannten geschlossenen Ausdrücke. Die Erweiterung der Guinierschen Näherung auf Haufwerke verschieden großer Partikel ist inkorrekt.

R. Hosemann.

**Riseman, Jacob:** Particle size distribution from small-angle X-ray scattering. *Acta crystall.* 5, 193—196 (1952).

A solution of the integral equation describing the intensity of X-ray scattering at low angles by a non-uniform collection of independently scattering spherical particles is given. The final result is in a form such that the particle-size distribution can be calculated by integration. The resolvent kernel, which solves the integral equation, is shown to be a combination of half-integral order Bessel functions, and therefore obtainable from known tables. Utilizing the known scattering form for a single-sized group of spherical particles as illustration, the expected  $\delta$ -function type of distribution is shown to result. The result obtained here can also be applied to the visible light scattering of dilute solutions of polydisperse macromolecules. Zusammenfassg. des Autors.

**Oster, Gerald and D. P. Riley:** Scattering from cylindrically symmetric systems. *Acta crystall.* 5, 272—276 (1952).

Expressions for the intensity of scattering by systems composed of infinitely long cylindrical particles are derived. Four types of independent scattering regions are considered: (1) isolated cylindrical rods, with and without internal radial structure; (2) aggregates of parallel rods with fixed locations; (3) systems of parallel rods with variable locations; (4) two-dimensional crystals. The effect of random and specific orientation of independent scattering regions is discussed. The results are applicable to low-angle X-ray scattering from fibres and from macromolecular or micellar solutions.

Zusammenfassg. des Autors.

**Hosemann, R. and S. N. Bagchi:** Existenzbeweis für eine eindeutige Röntgenstrukturanalyse durch Entfaltung. I. Entfaltung zentro-symmetrischer endlicher Massenverteilungen. *Acta crystall.* 5, 749—762 (1952).

Wenn die Intensitätsverteilung im reziproken Gitter ganz genau bekannt ist (d. h. die „Feinstruktur“ der Reflexe, nicht nur das integrale Reflexionsvermögen), so kann mittels des Faltungstheorems der Fouriertransformation bewiesen werden, daß eine eindeutige Strukturbestimmung bei endlichen Massenverteilungen mit Symmetrie- oder Antisymmetriezentren möglich ist. Durch Transformation erhält man aus dem Fourierraum eine  $Q$ -Funktion im Kristallraum (= physikalischer Raum). Diese kontinuierliche  $Q$ -Funktion wird dann in eine Gitterpunkt-Funktion mit genügend kleinen Gitterdimensionen transformiert (Rasterung der  $Q$ -Funktion). Diese „gegitterte“  $Q$ -Funktion liefert durch ein Faltungspolynom endlichen Grades die gesuchte Elektronendichteverteilung. Diese wird automatisch als eine Gitterfunktion mit derselben Zelle wie die  $Q$ -Funktion erhalten. — Da die Intensitätsverteilung im reziproken Raum praktisch nicht beliebig genau meßbar ist, so findet die Methode keine unmittelbare Anwendung. W. Nowacki.

**Hosemann, R. and S. N. Bagchi:** The interference theory of ideal paracrystals. *Acta crystall.* 5, 612—614 (1952).

Der Begriff eines deformierten Gitters, „idealer Parakristall“ genannt (R. Hosemann, dies. Zbl. 37, 137; 38, 414), und seine Interferenztheorie führt zu einer Verallgemeinerung anderer bekannter Interferenztheorien und entartet unter gewissen speziellen Bedingungen zu der Interferenztheorie der Kristalle von v. Laue und Bragg, zu denjenigen der Flüssigkeiten von Debye-Menke und Zernike-Prins und schließlich zu denjenigen der amorphen Stoffe von Guinier-Warren. Hosemann.

W. Nowacki.

**Hirsch, P. B.:** The reflexion and transmission of X-rays in perfect absorbing crystals. *Acta crystall.* 5, 176—181 (1952).

Die von Ewald (1916) geschaffene dynamische Gittertheorie wird in einer von Zachariasen (1945) erweiterten Form benutzt, um die experimentellen Ergebnisse von Borrmann (1941, 1950) quantitativ nachzurechnen, die mit  $\text{Cu K}\alpha$  bzw.  $\text{K}\beta$ -Röntgenstrahlung an ausgesucht guten Calcit-Einkristallen im symmetrischen Lauefall beobachtet wurden und als „anomale Absorption“ oder „Borrmann-Effekt“ bekannt sind. Da in diesen Experimenten die Divergenz des Primärstrahles dieselbe Größenordnung wie die aus der dynamischen Gittertheorie ableitbare Winkelbreite der Wellenfelder im Einkristall hatte, mußte zu diesem Vergleich aus den Grundgleichungen die Integralintensität der Reflexe errechnet werden, was in graphischem Näherungsverfahren geschah. Die so berechneten anomalen Absorptionskoeffizienten stimmen mit den gemessenen befriedigend überein. Daß sie systematisch kleiner sind als letztere, findet seine Begründung in der Realstruktur der Einkristalle, insbesondere in den in der Theorie noch nicht berücksichtigten thermischen Schwingungen der Gitteratome. So ergibt sich für die oben angegebenen Wellenlängen der normale Absorptionskoeffizient zu  $205\text{ cm}^{-1}$  bzw.  $151\text{ cm}^{-1}$ , der anomale für die  $1011$ -Netzebene theoretisch zu  $8,7\text{ cm}^{-1}$ , gemessen zu 15 bis  $19\text{ cm}^{-1}$  (bei genügend dickem Kristall).

R. Hosemann.

Patterson, A. L.: An orthogonal unit vector triplet associated with a general lattice. *Acta crystall.* **5**, 829—833 (1952).

Es wird gezeigt, daß ein orthogonales Vektorsystem  $E$  und eine symmetrische Matrix  $\gamma$  (zusammen mit ihrer inversen  $\gamma^*$ ) existiert, so daß die vier Ausdrücke  $a = \gamma E$ ;  $E = \gamma a^*$ ;  $a^* = \gamma^* E$ ;  $E = \gamma^* a$  die Transformationen zwischen den Systemen  $a$ ,  $a^*$  und  $E$  ergeben. Die  $\gamma$ -Matrizen werden dann durch die Matrixgleichungen  $\gamma^2 = g$  und  $\gamma^{*2} = g^*$  definiert. Die Lösungen werden für alle zweidimensionalen Netze und für alle symmetrischen dreidimensionalen Gitter gegeben. Methoden zur Berechnung des triklinen Gitters werden entwickelt und Anwendungsmöglichkeiten der  $E$ -Systeme bei kristallographischen Berechnungen diskutiert.

W. Nowacki.

Cochran, W.: The symmetry of real periodic two-dimensional functions. *Acta crystall.* **5**, 630—633 (1952).

Es wird die Symmetrie einer reellen periodischen Funktion untersucht, wenn „umkehrende“ Symmetrieelemente (reversal symmetry elements), die Punkte mit Funktionswerten gleicher Größe aber entgegengesetztem Vorzeichen ineinander überführen, in die Betrachtung miteinbezogen werden. In zwei Dimensionen gibt es 46 „umkehrende“ Raumgruppen und 3 in einer Dimension, welche ein oder mehrere solcher Symmetrieelemente enthalten. (Für drei Dimensionen sind es 1651 Gruppen; s. N. W. Belov, N. N. Neronova und T. S. Smirnova, dies. Zbl. **66**, 278).

W. Nowacki.

Cruickshank, D. W. J.: On the relation between Fourier and least-squares methods of structure determination. *Acta crystall.* **5**, 511—518 (1952).

Ein Kriterium, um Atomkoordinaten von aufgelösten und unaufgelösten Maxima bei der Fouriermethode zu bestimmen, wird eingeführt. Es wird gezeigt, daß die Gleichungen zur Koordinatenverfeinerung genau den Normalgleichungen der kleinsten Quadrate für die Funktion  $R = \sum_h w(|F_0(h)| - |F_c(h)|)$  [ $F_0$  = beobachtete,  $F_c$  = berechnete Strukturamplitude,  $w$  = Gewichtsfunktion] entsprechen. Ein Kriterium, um Atomkoordinaten aus der Pattersonsynthese zu finden, führt zu Verfeinerungsgleichungen ähnlich den Normalgleichungen der Funktion  $R_2 = \sum_h w''(|F_0(h)|^2 - |F_c(h)|^2)$ . Zentrosymmetrische und nicht-zentrosymmetrische Raumgruppen werden untersucht. Näherungsgleichungen und Beziehungen zu Arbeiten von Booth und Cochran werden diskutiert.

W. Nowacki.

Bragg, W. L.: A device for calculating structure factors. *Acta crystall.* **5**, 474—475 (1952).

Es wird ein einfacher Apparat zur Berechnung von Strukturfaktoren der Form

$$\sum f \cos(\sin) 2\pi x/a \cdot \cos(\sin) 2\pi k y/b$$

beschrieben (hauptsächlich bei organischen Strukturen mit C, N und O). 15 Glieder sind aufsummierbar. Das Prinzip besteht im Erzeugen von Drehmomenten durch exzentrische Lagen von Gewichten und deren Ausbalancierung.

W. Nowacki.

Beevers, C. A.: Fourier strips at a 3° interval. *Acta crystall.* **5**, 670—673 (1952).

Die Herstellung und Benutzung eines neuen Satzes von „Fourier-Streifen“ für ein 3°-Intervall wird beschrieben (an Stelle des bisherigen mit 6°-Intervallen). Diese Streifen können zur Berechnung von Strukturamplituden, von Fourier- und Pattersonreihen sowie von Fourier-transformierten verwendet werden.

W. Nowacki.

Beevers, C. A. and H. Lipson: The use of Fourier strips for calculating structure factors. *Acta crystall.* **5**, 673—675 (1952).

Es wird eine Methode beschrieben, die es gestattet, mittels „Fourier-strips“ direkt Strukturamplituden zu berechnen. Genauigkeitsgrenzen und Anwendungsbeispiele werden besprochen.

W. Nowacki.

Cochran, W.: A relation between the signs of structure factors. *Acta crystall.* **5**, 65—67 (1952).

Wenn man das Ausmaß betrachtet, in dem eine Teil-Fourierreihe, welche nur wenige der starken Strukturamplituden enthält, die Elektronendichte eines Kristalles wiedergibt und wenn man außerdem die Beziehungen zwischen den Strukturamplituden einer Elektronendichte und denjenigen des Quadrates dieser Dichteverteilung



berücksichtigt, so erhält man eine Wahrscheinlichkeitsbeziehung zwischen den Vorzeichen der Strukturamplituden in der Form  $S(H) = S(H') S(H + H')$  [ $S =$  Vorzeichen von  $F_H \equiv F_{h,k,l}$ ]. Diese Beziehung wird durch die Gleichung von Sayre nahegelegt und sie steht auch mit den Ungleichungen von Harker-Kasper in Beziehung.

W. Nowacki.

**Cochran, W. and H. B. Dyer:** Some practical applications of generalized crystal-structure projections. *Acta crystall.* 5, 634—636 (1952).

Die verallgemeinerte Projektion einer periodischen Verteilung  $\varrho(x, y, z)$  ist als  $c \int_0^1 \varrho(x, y, z) \exp [2\pi i L_z] dz$  definiert und kann als zweidimensionale Fourierreihe ausgedrückt werden. Zwei praktische Beispiele werden durchgerechnet.

W. Nowacki.

**Cochran, W., F. H. C. Crick and V. Vand:** The structure of synthetic polypeptides. I: The transform of atoms on a helix. *Acta crystall.* 5, 581—586 (1952).

The formulae are given for the Fourier transforms of a number of helical structures; namely, a thin helical wire, a set of identical atoms spaced at regular intervals on a helix, and the general case of a group of atoms repeated by the operation of a non-integer screw. General predictions are made concerning the intensities of the X-ray diffraction pattern of the synthetic polypeptide poly- $\gamma$ -methyl-L-glutamate, assuming that its structure is based on the  $\alpha$ -helix suggested by Pauling and Corey.

Zusammenfassg. des Autors.

**Hauptman, H. and J. Karle:** Crystal-structure determination by means of a statistical distribution of interatomic vectors. *Acta crystall.* 5, 48—59 (1952).

Die Gleichungen für die Strukturamplituden werden als gekoppelte und geschlossene Vektor-polygone interpretiert. Diese Interpretation gestattet die Anwendung des Problems des „random walk“ um die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Strukturamplituden und der Koordinatendifferenzen zwischen spezifischen Paaren von Atomzentren im Falle starrer Kristalle zu erhalten. In Praxis müssen die Intensitäten bezüglich der thermischen Bewegung korrigiert werden. Alle Kristalle können mit der Wahrscheinlichkeitsformel für den allgemeinen asymmetrischen Fall behandelt werden und die dem Kristall eigene Symmetrie ergibt sich automatisch. Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die die Kristallsymmetrie voraussetzen, können auch erhalten werden und der zentrosymmetrische Fall wird im Detail berechnet. Die Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die zwischenatomaren Vektoren und der Pattersonsynthese wird abgeleitet.

W. Nowacki.

**Fumi, Fausto G.:** Physical properties of crystals: The direct-inspection method. *Acta crystall.* 5, 44—48 (1952).

Die Eigenschaften von Tensoren, z. B.  $t_{ikl}$  ( $i, k, l = 1, 2, 3$ ) in gewissen Kristallklassen werden durch ein vom Verf. „direct-inspection method“ genanntes Verfahren bestimmt. Dieses beruht darauf, daß bei passender Darstellung der Kristallklasse (d. h. bei geeignetem Koordinatensystem) aus der Darstellung Schlüsse auf die Komponenten des Tensors gezogen werden können. Beispiele erläutern das Verfahren.

J. J. Burckhardt.

**Fumi, Fausto G.:** The direct-inspection method in systems with a principal axis of symmetry. *Acta crystall.* 5, 691—694 (1952).

In Fortsetzung voranstehend referierter Arbeit wird die „direct-inspection method“ auf weitere Kristallklassen ausgedehnt.

J. J. Burckhardt.

**Okaya, Yoshiharu and Isamu Nitta:** Linear structure-factor inequalities and their application to the structure determination of tetragonal ethylenediamine sulfate. *Acta crystall.* 5, 564—570 (1952).

Es werden neue lineare Ungleichungen für Strukturamplituden von zentrosymmetrischen Kristallen abgeleitet. Diese wurden auf die Strukturbestimmung des tetragonalen Äthylen-diaminsulfat angewandt, bei dem die Vorzeichen von fast allen wichtigen Amplituden innerhalb weniger Stunden ermittelt werden können und welche dann eine Fouriersynthese lieferten.

W. Nowacki.

**Okaya, Yoshiharu and Isamu Nitta:** On an application of inequality methods to centrosymmetric crystals with partly known structures. *Acta crystall.* 5, 687 (1952).

Wenn einige Atome einer Kristallstruktur in speziellen Positionen liegen oder durch eine Pattersonfunktion oder andere Methoden bestimmt worden sind, kann dieses Kenntnis zu einer modifizierten Anwendung der Methode der Ungleichungen verwendet werden. Sei ' = bekannter Teil, '' = unbekannter Teil der Struktur; dann

wird die unitäre Strukturamplitude  $U_{hkl} = \sum_i n'_i \cos 2\pi (h x'_i + k y'_i + l z'_i) + \sum_{i''} n''_i \cos 2\pi (h x''_i + k y''_i + l z''_i) = U'_{hkl} + U''_{hkl}$  [ $n_i = Z_i/F_{000}$ ].  $U''_{hkl}$  kann umgeformt werden zu

$$\hat{U}'' = U''_{hkl} / \sum_{i''} n''_i = [U_{hkl} - \sum_{i'} n'_i \cos 2\pi (h x'_i + k y'_i + l z'_i)] / [1 - \sum_{i'} n'_i].$$

wobei die Werte den Ungleichungen genügen müssen.

W. Nowacki.

**Okaya, Yoshiharu und Isamu Nitta:** Application of our linear inequalities and some remarks on B. S. Magdoff's paper on „Forbidden reflections in the Harker-Kasper inequalities“. Acta crystall. 5, 687—688 (1952).

Die Willkür in der Wahl der Vorzeichen der Strukturamplituden führte Magdoff [Acta crystall. 4, 268 (1951)] zu zweideutigen Resultaten. Deshalb wurde von den Autoren in ihren ursprünglichen Arbeiten (Referate vorstehend) die Wichtigkeit dieser Willkür besonders betont.

W. Nowacki.

**Sakurai, Kiichi:** Some remarks on the relation between the Harker-Kasper inequality and the Okaya-Nitta linear inequalities. Acta crystall. 5, 697 (1952).

Es werden die Beziehungen zwischen den Ungleichungen (1) von Okaya-Nitta

$$(1) \quad \begin{cases} |U_H \pm U_{H'}| \leq \{(1 \pm U_{H+H'}) + m^2 (1 \pm U_{H-H'})\} / 2m \\ |U_H \pm U_{H'}| \leq \{m^2 (1 \pm U_{H+H'}) + (1 \pm U_{H-H'})\} / 2m \end{cases}$$

bzw. von Harker-Kasper

$$(2) \quad U_H \pm U_{H'} \leq \sqrt{(1 \pm U_{H+H'}) (1 \pm U_{H-H'})}$$

im einzelnen diskutiert ( $m = \text{positiv ganz}$ ). Gleichung (2) ist wirksamer als (1). Eine graphische Darstellung von (1) und (2) in der Form (1)  $k \leq X/2m + m Y/2$ ,  $k \leq m X/2 + Y/2m$ ;  $k \leq \sqrt{XY}$  mit  $k = |U_H| + |U_{H'}|$ ,  $1 + U_{H+H'} = X$ ,  $1 - |U_{H-H'}| = Y$  wird erläutert.

W. Nowacki.

**Sakurai, Kiichi:** A graphical method for applying Harker-Kasper inequalities to structure determination. Acta crystall. 5, 546—548 (1952).

Die Ungleichung  $(U_H \pm U_{H'})^2 \leq (1 \pm U_{H+H'}) (1 \pm U_{H-H'})$  kann mittels  $|U_H| + |U_{H'}| = k$ ,  $1 \pm |U_{H+H'}| = X$  und  $1 \pm |U_{H-H'}| = Y$  in der Form  $k^2 \leq XY$  geschrieben werden, d. h. die  $X$ - und  $Y$ -Werte müssen auf der positiven Seite der Hyperbel  $xy - k^2 = 0$  liegen. Man kann sich nun für verschiedene  $k$  ein System solcher Hyperbeln zeichnen und erhält durch einfaches Einzeichnen von vier symmetrisch gelegenen Punkten, welche den vier möglichen Kombinationen  $\pm |U_{H+H'}|$ ,  $\pm |U_{H-H'}|$  entsprechen (mit  $|U_{H+H'}| > |U_{H-H'}|$ ), diejenigen, welche in die positive Region fallen und einzig in Frage kommen, worauf sich die Beziehungen zwischen den Vorzeichen der  $U_H$ ,  $U_{H'}$ ,  $U_{H+H'}$ ,  $U_{H-H'}$  ergeben.

W. Nowacki.

**Zachariasen, W. H.:** A new analytical method for solving complex crystal structures. Acta crystall. 5, 68—73 (1952).

Ausgangspunkt bildet für zentrosymmetrische Kristalle die Ungleichung

$$(|U_H| + |U_K|)^2 \leq 1 + S_H S_K (U_{H+K} + U_{H-K}) + U_{H+K} U_{H-K}$$

[ $U_H = \text{unitäre Strukturamplitude}$ ,  $H = h, k, l$ ;  $S_H = \text{Vorzeichen von } U_H$   $U_{h,k,l}$ ]. Es wird gezeigt, daß für starke Reflexe mit großer Wahrscheinlichkeit die Gleichung  $S_{H+K} = S_H S_K$  oder  $S_H = S(S_{K_i} \overline{S_{H-K_i}})$  gilt. Die Methode wird auf die Strukturbestimmung von Metaborsäure angewandt.

W. Nowacki.

**Lavine, Louis R.:** Corrections to Grison's paper on the Harker-Kasper inequalities and to Zachariasen's paper on the „Statistical method“. Acta crystall. 5, 846—847 (1952).

Es wurden in den Arbeiten von E. Grison [Acta crystall. 4, 489 (1951)] und W. H. Zachariasen (Referat vorstehend) einige Irrtümer gefunden. Insbesondere sollen die Ableitungen in der zweiten Arbeit nicht die Fundamentalgleichung  $S = S(\overline{S_{K_i}} \overline{S_{H+K_i}})$  liefern. Diese Gleichung kann aber auf anderem Wege erhalten werden.

W. Nowacki.

● **Chalmers, Bruce** (edited by): **Progress in metal physics, 3.** (Progress Series.) London: Pergamon Press, Ltd.; New York: Interscience Publishers, Inc. 1952. VIII, 334 p. 48 s.

Einige der Arbeiten aus diesem Band werden im Folgenden einzeln besprochen.

**MacDonald, D. K. C.:** **Properties of metals at low temperatures.** Progress in metal physics 3, 42—75 (1952).

Bericht über die spezifische Wärme und die elektrische Leitfähigkeit von Metallen und Legierungen bei tiefen Temperaturen. Supraleitung wird nur kurz behandelt.

*G. Höhler.*

**Mott, N. F.:** **Recent advances in the electron theory of metals.** Progress in metal physics 3, 76—114 (1952).

Verf. berichtet über die theoretische Begründung der Unterschiede zwischen Metallen und Nichtmetallen, magnetische Eigenschaften, spezifische Wärme, Kohäsionsenergie, elastische Konstanten, Ladungsverteilung um Fremdatome, und diskutiert neuere Ergebnisse der Spektroskopie mit weichen Röntgenstrahlen.

*G. Höhler.*

**Vonsovskij, S. V., L. Ja. Kobelev und K. P. Rodionov:** **Zur Theorie der galvanomagnetischen Erscheinungen in Ferromagneticis.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. 16, 569—580 (1952) [Russisch].

**Zil'berman, A. E.:** **Das Elektron im schwachen periodischen elektrischen und im homogenen magnetischen Feld.** Žurn. éksper. teor. Fiz. 23, 49—54 (1952) [Russisch].

Ausgehend von den stationären Lösungen der Schrödingergleichung eines freien Elektrons im homogenen Magnetfeld wird der energetische Einfluß eines (schwachen) periodischen Potentialfeldes mit Hilfe der Störungsrechnung zweiter Ordnung berücksichtigt. Durch einige längere Umformungen des Energie-Ausdrucks wird dieser in eine Form gebracht, die im wesentlichen dem Energie-Ausdruck des freien Elektrons (im Magnetfeld) entspricht, wobei nun aber an Stelle der gewöhnlichen Elektronenmasse eine scheinbare Masse zu stehen kommt.

*H. Haken.*

**Oreškin, P. T.:** **Über die Veränderung der Magnetisierung bei allseitiger elastischer Kompression.** Žurn. éksper. teor. Fiz. 23, 728—730 (1952) [Russisch].

**Frenkel', Ja. I.:** **Über den Zustand der Dielektrika vor dem Durchschlag.** Žurn. éksper. teor. Fiz. 23, 619—625 (1952) [Russisch].

**Silin, V. P.:** **Zur Theorie des Anregungsspektrums eines Mehrteilchensystems.** Žurn. éksper. teor. Fiz. 23, 641—648 (1952) [Russisch].

Ausdehnung der Untersuchungen von Klimontovič und Silin (dies. Zbl. 49, 287) auf von Null verschiedene Temperaturen und auf die Berechnung des Abklingens der Anregungen im Fermigas. Außerdem werden im Hinblick auf eventuelle Anwendung bei der Supraleitung transversale Schwingungen des Elektronengases in einem Medium mit vorgegebener Dielektrizitätskonstante behandelt.

*G. Höhler.*

**Silin, V. P.:** **Über das Anregungsspektrum eines Elektronen- und Ionensystems.** Žurn. éksper. teor. Fiz. 23, 649—659 (1952) [Russisch].

Die schon von Klimontovič und Silin (dies. Zbl. 49, 287) benutzte Methode wird auf ein aus Elektronen und Ionen bestehendes System angewandt. Im kurzwelligen Gebiet werden Elektronen und Ionen unabhängig voneinander angeregt, bei langen Wellen tragen die Anregungen im wesentlichen kollektiven Charakter.

*G. Höhler.*

**Klimontovič, Ju. L. und V. P. Silin:** **Zur Theorie der Anregungsspektren makroskopischer Systeme.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 361—364 (1952) [Russisch].

A discussion of the distribution function  $f(q, p, t)$  of a system of interacting



particles. Applications to special cases (e. g. the electron plasma) are briefly indicated.

P. T. Landsberg.

Laue, M. von: Kritische Bemerkungen zur Theorie der Supraleitung. I, II. Ann. der Physik, VI. F. 10, 296—301, 305—309 (1952).

London, F.: Bemerkungen zu vorstehender Arbeit zur „Theorie der Supraleitung“ von Max von Laue. Ann. der Physik, VI. F. 10, 302—304 (1952).

Beck, F.: Eine spezielle Form des elektrodynamischen Potentials von Supraleitern. Ann. der Physik, VI. F. 10, 310—313 (1952).

London, F.: Zu den weiteren „Bemerkungen zur Theorie der Supraleitung“ des Herrn von Laue. Ann. der Physik, VI. F. 10, 314—316 (1952).

Nach der London-v.Laueschen Theorie der Supraleitung wird die Frage, ob eine Platte der Dicke  $L$  im Magnetfeld supraleitend ist oder nicht, folgendermaßen entschieden: Es gibt eine charakteristische Funktion  $G$ , die im  $NL$ -Zustand den Wert  $G_N = L \cdot f_n$  und im  $SL$ -Zustand den Wert  $G_S = L \cdot (c(L) \cdot H^2 + f_s)$  hat. Dabei ist unterhalb des Sprungpunktes  $f_n > f_s$ ;  $c(L)$  ist eine Funktion von  $L$ , die sich aus den Londonschen Differentialgleichungen ergibt. Wesentlich ist, daß  $c(L)$  für kleines  $L$  nach Null geht, und für großes  $L$  konstant wird. Stabil ist der Zustand, der dem kleineren Wert von  $G$  entspricht, und das ist unterhalb des Sprungpunktes für hinreichend kleines  $H$  der supraleitende. London knüpft daran nun die folgende Betrachtung: Wenn man sich die Platte in  $2\nu + 1$  abwechselnd  $SL$  und  $NL$  Schichten von der Dicke  $d_s$  resp.  $d_n$  zerlegt denkt, dann erhält man  $G' = (\nu + 1) d_s [c(d_s) H + f_s] + \nu \cdot d_n f_n$ . Dann stellt sich heraus, daß  $G' < G_S$  ist, vorausgesetzt, daß man  $\nu$  groß genug, und  $d_n$  klein genug wählt. Dieser Zustand sollte sich einstellen, was erfahrungsgemäß nicht geschieht. London glaubt nun, daß dieses „Dilemma“ nur zu lösen sei, wenn man noch eine Oberflächenenergie einführt, die groß genug ist, um  $G' > G_S$  zu machen, und v. Laue bestreitet das. — (Eine Schwierigkeit der Londonschen Schichtenstruktur ist die, daß bei festgehaltenem  $\nu$  das Minimum von  $G'$  bei  $d_n = 0$  liegt. Dann ist aber wieder die ganze Platte supraleitend, aber die Verteilung der Supraströme entspricht einer unstetigen Lösung der Londonschen Gleichung. Die Londonsche Struktur würde also spontan in einen physikalisch unmöglichen Zustand übergehen. D. Ref.).

H. Koppe.

Beck, F.: Zur phänomenologischen Theorie der Supraleitung. Z. Naturforsch. 7a, 820—821 (1952).

Beck, F.: Zur Phasenumwandlung zwischen Supra- und Normalleiter im kritischen Magnetfeld. Ann. der Physik, VI. F. 10, 317—326 (1952).

Die Londonschen Gleichungen werden für eine bewegte Grenzfläche zwischen Normal- und supraleitendem Gebiet gelöst, und an der Lösung wird gezeigt, daß auch bei bewegten Grenzflächen keine Unstetigkeit der Normalkomponente des Poyntingvektors auftreten kann.

H. Koppe.

Laue, Max von: Thermodynamik und Supraleitung. Z. angew. Phys. 4, 458—459 (1952).

Es wird an Beispielen dargelegt, daß die Tatsache, daß in einem supraleitenden Zylinder die Supraleitung bei Überschreitung des kritischen Magnetfeldes völlig zusammenbricht, und sich nicht etwa ein supraleitender Kern mit höherem Schwellenwert ausbildet, nicht im Widerspruch zur üblichen phänomenologischen Theorie steht, und insbesondere nicht zur Annahme einer besonderen Oberflächenspannung der supraleitenden Phase zwingt.

H. Koppe.

Ginzburg, V. L.: Über die Berücksichtigung der Anisotropie in der Theorie der Supraleitung. Žurn. éksp. teor. Fiz. 23, 236—238 (1952) [Russisch].

Die halbklassische Theorie der Supraleitung von Ginzburg und Landau [Žurn. éksp. teor. fiz. 20, 1064 (1950)] liefert eine feldabhängige Eindringtiefe der Form

$$\delta = \delta_0 [1 + (\kappa/4\sqrt{2}) (H_0/H_{KM})^2]; \kappa = (\sqrt{2} e/\hbar c) \delta_0^2 K_{KM};$$

$H_{KM}$ : kritisches Feld des dicken Supraleiters. Im Hinblick auf Experimente zur Bestimmung der Feldabhängigkeit der Eindringtiefe an weißem Zinn, einem Kristall, der eine starke Anisotropie aufweist [s. insbesondere A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 203, 210 (1950)], wird obiges Ergebnis für anisotrope Kristalle erweitert. Es lautet dann für den Spezialfall Strom in  $x$ -Richtung, supraleitender Halbraum  $z > 0$ ,  $x, y, z$  Hauptachsen des Kristalls:

$$\delta_x = \delta_{0x} [1 + (\kappa_{xx}/4\sqrt{2}) (\delta_{0x}/\delta_{0z}) (H_0/H_{KM})^2]; \kappa_{xx} = (\sqrt{2} e/\hbar c) \delta_{0x}^2 H_{KM}.$$

F. Beck.

**Ginzburg, V. L.:** Über das Verhalten von supraleitenden Häutchen im Magnetfelde. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 385—388 (1952) [Russisch].

Eine von Ginzburg [Fortschr. Physik 42, 333 (1950)] vorgeschlagene phänomenologische Theorie der Supraleitung wird auf die dünne Platte angewandt. Es handelt sich im wesentlichen um eine Theorie, bei der die Dichte der Supraleitungselektronen  $\rho_s$  als unabhängige Feldfunktion eingeführt wird. Die Rechnung enthält aber die Näherungsannahme, daß  $\rho_s$  (hier zur „Abkürzung“  $|\psi|^2$  geschrieben) über die ganze Platte konstant ist. *H. Koppe.*

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● **Poincaré, Henri:** Œuvres de Henri Poincaré. Publiés sous les auspices de l'Académie des Sciences par la Section de Géométrie. Tome VII. Publié avec la collaboration de Jacques Lévy. Tome VIII. Publié avec la collaboration de Pierre Sémirot. Paris: Gauthier-Villars 1952. VIII, 635 p.; 693 p.

Diese Bände enthalten Arbeiten über analytische und Himmels-Mechanik sowie Astronomie; daneben Ausführungen der Bearbeiter.

**Coutez, Raymond:** Sur l'application du calcul des probabilités à l'astronomie. Collection de Logique mathématique, Sér. B I: Théorie des probabilités. Paris-Louvain 1952, 67—84 (1952).

● **Siegel, C. L.:** Himmelsmechanik. Göttingen: Mathematisches Institut der Universität Göttingen 1952. (Hektographiert).

Die Vorlesungen sind inzwischen in Buchform erschienen und in diesem Zbl. 70, 454 besprochen.

**Albada, G. B. van:** On a generalization of the integral of angular momentum and its significance for stellar dynamics. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B 55, 620—627 (1952).

In nichtsphärischen Sternsystemen mit differentiellen Bewegungen gibt es außer Energie- und Momentensatz noch ein weiteres in den Geschwindigkeitskomponenten quadratisches Integral der Bewegung („Integral des kombinierten Drehmomentes“), welches im Falle der Bewegung parallel zur Hauptebene des Systems in das Energieintegral übergeht. Es kann allerdings nicht strenge Lösung der Poisson-Gleichung selbstkonsistenter Sternsysteme sein (eine Lösung der Differentialgleichung für das Gravitationspotential entspricht dem Feld zweier fester Attraktionszentren), sondern nur eine Näherung in endlichen Bereichen. *Theodor Schmidt.*

**Thüring, B.:** Die Librationsbahnen der Trojaner als nicht-geschlossene Bahnkurven. Astron. Nachr. 280, 226—232 (1952).

Unter Benutzung des Jacobischen Integrals und eines Ergebnisses von Wilkens beweist der Verf., daß ganz allgemein im Probleme restreint die Librationsbahnen der Trojaner um die Punkte  $L_4$  und  $L_5$  nichtperiodische Bewegungen darstellen. Eine Abschätzung zeigt, daß sich für hinreichend kleine Anfangsexzentrizität die Librationsspirale nach außen windet. Die sich aus dem Jacobischen Integral ergebende Hillsche Grenzfläche, die im Falle des Problems restreint starr den Schwerpunkt der Körper umkreist, ändert im erweiterten Probleme restreint (wo die Bahnexzentrizität von 0 verschieden ist) im Laufe der Zeit ihre Gestalt; ihre Jacobi-Konstante  $C$ , für die der Verf. die Bezeichnung „Grenzflächenindex“ vorschlägt, tritt dann als Parameter einer Integralbeziehung auf. Es wird das Resultat einer näherungsweisen Berechnung der Jacobi-Konstanten für 13 der heute bekannten Trojaner und 3 weitere Planetoiden mitgeteilt. Dabei zeigt es sich, daß die Trojaner die kleinsten Grenzflächenindizes unter allen Planetoiden (ausgenommen den sonnenfernsten 944 Hidalgo) besitzen und daß sie alle unter dem Wert  $C_0 = 3,00$  liegen, also die Bahn der Trojaner in der Jupiterenebene keiner Beschränkung durch das Jacobi-Integral unterworfen ist. Bis auf Glieder in  $\mu = (\text{Jupitermasse}/\text{Gesamtmasse})$

ergibt sich der Grenzflächen-Pol-Abstand der beiden Zweige der Hillschen Grenzfläche zu  $Z_0 = 2 \sqrt{[4/(C - 1)^2] - 1}$ . Durch Umrechnung des Jacobi-Integrals unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung  $\mu$  und unter Berücksichtigung von  $a = 1$  ( $a$  große Halbachse) erhält Verf. die Beziehung  $2 \cos \varphi \cdot \cos \eta = C - 1$  zwischen Exzentrizitätswinkel  $\varphi$  und Neigung  $\eta$ . Diese gibt die „Entwicklungslinien“ an, längs derer sich  $\varphi$  und  $\eta$  im Laufe langer Zeiträume ändern können. Hieraus folgt: 1. Bei großem  $\eta$  bedingt Neigungsänderung relativ große Änderung der Exzentrizität; dagegen sind bei kleinen Exzentrizitäten und Neigungen Neigungsänderungen mit Exzentrizitätsänderungen gleicher Größenordnung verbunden. 2. Zunahme der Exzentrizität ist mit Abnahme der Neigung verknüpft und umgekehrt. Zum Schluß sei auf einige Druckfehler aufmerksam gemacht: in Formel (3) ist auf der rechten Seite  $1 + \mu$  durch  $1 - \mu$  zu ersetzen; in Tabelle 2 muß es 944 Hidalgo und 279 Thule heißen.

*E. Hölder—Eisenreich.*

**Strassl, Hans:** Nomogramme für Höhe und Azimut von Gestirnen. Math.-phys. Semesterber. 2, 279—288 (1952).

Das Problem der Umwandlung von Äquatorkoordinaten (Stundenwinkel, Deklination) eines Gestirns in Horizontkoordinaten (Azimut, Höhe) und umgekehrt kann, sofern große Genauigkeit nicht verlangt wird, durch Nomogramme gelöst werden. Obwohl bereits Nomogramme dieser Art gelegentlich in der Literatur veröffentlicht worden sind, hält es der Verf. für erwünscht, nach einer möglichst vollkommenen Lösung dieser Aufgabe zu suchen. Die Untersuchung zeigt, daß es notwendig ist, für verschiedene Bereiche der Variablen verschiedene Nomogramme zu entwerfen, um in jedem Fall eine befriedigende Genauigkeit zu erreichen. Hierzu bieten sich verschiedene Möglichkeiten — einzelne praktische Lösungen werden in extenso gegeben, doch soll die ausführlich dargelegte Theorie den Leser instandsetzen, nach besseren zu suchen.

*K. Stumpff.*

**Kurth, Rudolf:** Zur Bestimmung der Dichte in den Kugelsternhaufen. Z. Astrophys. 31, 121—122 (1952).

**Camm, G. L.:** Self-gravitating star systems. II. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 112, 155—176 (1952).

**Kurth, Rudolf:** Zur Schwarzschildschen Integralgleichung. Z. Astrophys. 31, 115—120 (1952).

Die bekannte Integralgleichung 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(y) f(x+y) dy = g(x),$$
 auf welche Schwarzschild das Problem der Bestimmung der räumlichen Dichte der Sterne zurückgeführt hat, wird auf Lösbarkeit und Eindeutigkeit untersucht. Entgegen abweichenden Auffassungen, die gelegentlich in der Literatur vertreten wurden, ergibt sich durch Ansatz einer Entwicklung nach einem geeignet gewählten System von orthogonalen Funktionen, daß die Lösung, falls vorhanden, nicht notwendig eindeutig ist. Wenn aber, was bei Anwendungen meist und in dem vorliegenden astronomischen Problem stets erfüllt ist, die Funktion  $K$  als statische Verteilungsfunktion nur positive Werte annehmen kann, ist die Lösung eindeutig. Dieser Eindeutigkeit steht aber eine — in der Literatur ebenfalls schon mehrfach erwähnte — numerische Unbestimmtheit gegenüber. Innerhalb eines gewissen Intervalls der Variablen kann man zu jeder Lösung beliebig viele andere angeben, die die Gleichung innerhalb einer vorgegebenen, beliebig niedrigen Genauigkeitsgrenze erfüllen und sich von der ursprünglichen Lösung beliebig stark unterscheiden. Bemerkung des Ref.: Die Arbeit behandelt Tatsachen, die inhaltlich lange bekannt sind. Sie sind aber bisher nie in wirklich exakter Form bewiesen worden. Es muß dem Verf. als großes Verdienst angerechnet werden, daß endlich die wenig durchsichtige Problematik des Themas durch exakte Begriffsbildung geklärt worden ist.

*F. Schmeidler.*



**Agostinelli, Cataldo:** Figure di equilibrio prossime all'ellissoide di una massa liquida omogeneo attratta da più corpi lontani con la legge di Newton. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 281—322 (1952).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 49, 257) zeigt Verf., daß nur spezielle Ellipsoide, kritische oder gegabelte genannt, als Gleichgewichtsfiguren existieren, die bei infinitesimaler Transformation neue Gleichgewichtsfiguren liefern können; Angabe notwendiger Bedingungen für die Existenz solcher kritischen Ellipsoide; Behandlung der Fälle  $n = 2, 3$ .  
*O. Volk.*

**Kushwaha, R. S. and P. L. Bhatnagar:** Stability of stars under variable  $\Gamma$ . Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 11—19 (1952).

Es wird die Stabilität der Grundschiwingung zweier Sternmodelle, eines homogenen Modells und eines Modells, bei dem die Dichte umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes vom Sternzentrum variiert, untersucht, und zwar unter der Voraussetzung, daß das Verhältnis der spezifischen Wärmen der Sternmaterie kontinuierlich vom Zentrum nach der Oberfläche des Sternes hin entsprechend dem Gesetz  $\Gamma = \Gamma_0 (1 - A r_0^2/R^2)$  abnimmt.  $r_0$  bedeutet die Distanz eines Massenpunktes im Gleichgewichtszustand des Sternes vom Sternzentrum,  $\Gamma_0$  den Wert von  $\Gamma$  im Sternzentrum und  $A$  eine dimensionslose Konstante.  
*H. Vogt.*

**Chatterji, L. D.:** Anharmonic pulsations of a polytropic model of index unity. Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 193—196 (1952).

Es werden die anharmonischen Pulsationen eines polytropen Sternmodells mit dem Index 1 untersucht. Es zeigt sich dabei, daß die Berücksichtigung der ersten Oberschiwingung zwar eine bessere, aber keine genügend gute Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie hinsichtlich der radialen Geschwindigkeitskurve ergibt.  
*H. Vogt.*

**Kushwaha, R. S.:** Adiabatic pulsations of a particular model of the variable star. Proc. nat. Inst. Sci. India 18, 461—466 (1952).

In dieser Arbeit wird die Stabilität eines Sternmodells untersucht, in dessen Inneren die Dichte nach dem Gesetz  $\rho_0 = \rho_c (1 - r_0/R)$  variiert, wobei  $\rho_c$  die Mittelpunkt-dichte,  $\rho_0$  die dem Gleichgewichtszustand entsprechende Dichte in irgendeinem Punkt,  $r_0$  den Abstand dieses Punktes vom Sternzentrum im Gleichgewichtszustand und  $R$  den Radius des Sternes bedeuten. Verf. findet, daß das Modell stabil ist, und er berechnet durch numerische Integration die Schwingungsperiode sowie die Schwingungsamplitude als Funktion des Abstandes vom Sternzentrum.  
*H. Vogt.*

● **Proceedings of the National Bureau of Standards Semicentennial Symposium on gravity waves held at the National Bureau of Standards on June 18—20, 1951.** (Circular 521.) Washington: National Bureau of Standards 1952. IV, 287 p. \$ 1,75.

Enthält 26 zusammenfassende Vorträge und 7 Kurzreferate über theoretische und experimentelle Arbeiten über Schwerewellen aus führenden Instituten innerhalb und außerhalb der USA. Von den vielen behandelten Themen können hier nur einige angeführt werden: Wellenausbreitung bei variabler Wassertiefe, Brandungswellen, nichtlineare Theorie für Wellen großer Amplitude, Erzeugung von Meereswellen durch den Wind, Untersuchungen über die Spektren von Meereswellen, Schwerewellen bei den Gezeiten der Atmosphäre, Seichestheorie, interne Gezeitenwellen, Meeresströmungen, Stereophotogrammetrische Bestimmung der Teilchenbewegung  
*W. Kertz.*

● **Rothé, Edmond et J.-P. Rothé:** Prospection géophysique. Tome I, II. Paris: Gauthier-Villars 1950, 1952. VIII u. 438 p., 714 p. 168, 342 Abb. 3360 fr., 5760 fr.

Dieses Lehrbuch der angewandten Geophysik ist aus der jahrzehntelangen Arbeit von Vater und Sohn Rothé in Straßburg hervorgegangen. In elf großen Kapiteln werden die Prospektions-Methoden der angewandten Geophysik mit zahlreichen Beispielen behandelt: Seismik, Messungen der Radioaktivität, gravimetrische, elektrische, magnetische und thermische Verfahren. Mit besonderer Klarheit sind jeweils die theoretischen Grundlagen dargestellt. Dabei werden gelegentlich Einzelprobleme derartig sorgfältig, fast möchte man sagen liebevoll, behandelt, daß dadurch das normale Verhältnis der Länge der Darstellung zur Bedeutung für die Praxis gestört wird. In der Beschreibung der Meßinstrumente ist das Buch leider schon jetzt etwas veraltet.

Das macht sich besonders in dem Kapitel über Seismik geltend. Der Hauptwert des Buches liegt zweifellos in der Fülle der geologischen Beispiele zu den einzelnen Verfahren. Es sind zu jeder Methode eine Reihe von Anwendungsbeispielen aus der Geschichte der geophysikalischen Erschließung der verschiedenen Länder der Erde angegeben mit Profilen, Karten und einem kurzen, aber gut verständlichen Begleittext.

W. Kertz.

**Worsley, Beatrice H.:** On the second-order correction term to values of gravity measured at sea. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 718—732 (1952).

Besprechung in dies. Zbl. 51, 240.

**Davies, Richard W.:** Turbulent diffusion and erosion. J. appl. Phys. 23, 941—948 (1952).

Der Verf. entwickelt eine neue Theorie der turbulenten Diffusion, um die Dynamik zerteilter Materie in einer Flüssigkeitssuspension zu beschreiben. Der stationäre Suspensionszustand in einer turbulenten Strömung wird wie eine Atmosphäre behandelt. Dimensionsüberlegungen werden zur Gewinnung der wichtigsten physikalischen Größen einer linearen Theorie, soweit sie von Wichtigkeit sind, benützt. Es wird vor allem gezeigt, daß der Bodensatz und die Stromsuspension in einer turbulenten Strömung nicht getrennt behandelt werden können. Eine qualitative Theorie der Sandrippeln wird im Anschluß an Instabilitätserscheinungen an einem flachen sandigen Boden unter bestimmten Turbulenzbedingungen gegeben.

A. Defant.

**Köhler, Hilding:** On the problem of condensation in the atmosphere. Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsal. (4) 14, 1—75 (1949).

Eine der wichtigsten Untersuchungen der Thermodynamik der Atmosphäre der letzten Zeit. Sie behandelt eingehend und auf Grund der neuesten Erkenntnisse der physikalischen Chemie das Problem der Kondensation, der Bildung der Elementartröpfchen und ihr Anwachsen zu den Wolkenelementen.

A. Defant.

**Ghosh, N. L.:** On the equilibrium of a thin atmosphere round a heavy central core: spheroidal and anchor-ring configurations. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 22—26 (1952).

Der Verf. beschäftigt sich mit Gleichgewichtsfiguren einer um einen homogenen kugelförmigen Zentralkörper rotierenden Atmosphäre. Diese setzt er als so dünn voraus, daß ihr Gravitationsfeld gegenüber dem des schweren Zentralkörpers vernachlässigt werden kann. Er gibt mögliche Gleichgewichtsfiguren von der Gestalt eines den Kugelnkern enthaltenden abgeplatteten Ellipsoids und von der Gestalt eines Ringes von elliptischem Querschnitt an. Die in einer früheren Arbeit (siehe dies. Zbl. 34, 412) gemachte Annahme, daß die Dichte  $\rho$  der Atmosphäre nur eine Funktion des Potentials ist, fällt hier fort. Unter gewissen Einschränkungen nimmt  $\rho$  nach außen hin stetig ab und wird — ebenso wie der Quotient  $p/\rho$  aus Druck und Dichte — auf der Berandung gleich 0. Die Winkelgeschwindigkeit ist variabel, ihr Quadrat ist stets positiv. Unter der Annahme, daß die Atmosphäre aus einem idealen Gas besteht, d. h., daß  $p = k \cdot \rho T$  gilt, ist auf der Oberfläche die Temperatur  $T = 0$ .

E. Hölder.

## Berichtigungen

**Džvaršejšvili, A. G.:** Über ein Konvergenzkriterium der Fourierreihe. Soobščenijskaja Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 11, 403—407 (1950) [Russisch]; dies. Zbl. 41, 33.  
In Zeile 4 v. u. lies „Dichtepunkt“ statt „Häufungspunkt“.

**Šilov, G. E.:** Homogene Funktionenringe. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 1 (41), 91—137 (1951) [Russisch]; dieses Zbl. 54, 48.

Die im Referat zitierte Arbeit steht in „dies. Zbl. 53, 84“, nicht in „dies. Zbl. 35, 84“.

**Robbins, Herbert and Sutton Monto:** A stochastic approximation method. Ann. math. Statist. 22, 400—407 (1951); dies. Zbl. 54, 59.

Der 2. Verfasser heißt **Sutton Monro**.

Der Name ist ebenso zu verbessern im Autorenregister auf S. 195, 1. Spalte, und S. 214, 1. Spalte, sowie im Sachregister auf S. 318, 3. Spalte, zweimal.

### Zu Band 46:

**Sanov, I. N.:** Aufstellung des Zusammenhanges zwischen periodischen Gruppen mit Primzahlperiode und Lieschen Ringen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 23—58 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 46, 32—34.

Auf S. 32 lies in Zeile 7 v. u. „Faktorgruppe“ statt „Faktorengruppe“.

In Zeile 5 v. u. „ $\mathcal{Q}_1^i/\mathcal{Q}_1^{i+1}$ “ statt „ $\mathcal{Q}_1^i \mathcal{Q}_1^{i+1}$ “ und in Zeile 1 v. u. „ $\mathcal{Q}_1^{m_0}$ “ statt „ $\mathcal{Q}_{m_0}$ “.

Auf S. 33, in Zeile 2 v. u. lies „bis  $F_q$  berechnet“ statt „berechnet“.

**Korobov, I. M.:** Einige mehrdimensionale Probleme der Theorie der diophantischen Approximationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 13—16 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 46, 47.

Der Verfasser heißt **N. M. Korobov**.

**Rajagopal, C. T.:** On a onesided Tauberian theorem. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 47—54 (1952); dies. Zbl. 46, 65.

In Zeile 6 v. o. des Referats soll die Formelnummer „(1)“ nicht an der angegebenen Stelle stehen, sondern vor  $\int_0^\infty \varphi(u) a(u) du < M$ .

**Bellman, Richard:** On approximate expressions for the exponential integral and the error function. J. Math. Physics 30, 226—231 (1952); dies. Zbl. 46, 72.

In Zeile 3 v. u. des Referates muß es auf der rechten Seite der 1. Gleichung heißen: „ $-a_{n+1} y^{-(n+1)}$ “ an Stelle von „ $-a_{n+1} + y^{-(n+1)}$ “.

**Tricomi, Francesco G.:** La seconda soluzione di Laguerre. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 1—4 (1952); dies. Zbl. 46, 75.

Der Titel der Arbeit lautet: **La seconda soluzione dell'equazione di Laguerre**.

**Delerue, Paul:** Sur une généralisation à  $n$  variables des polynômes d'Abel-Laguerre. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 66, 13—20 (1952); dies. Zbl. 46, 75—76.

Auf S. 76 sind in den Formeln (Zeile 2, 13 und 15 v. o.) die großen eckigen Klammern zu tilgen, ebenso in Zeile 7 v. o. auf der linken Seite der Formel die eckigen Klammern im Nenner. Ferner lies in Zeile 2 v. o. „ $L_m^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ “ statt „ $L_m^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ “.

In Zeile 8 v. u. des Referats lies „p. 363—387“ statt „p. 367—387“.



In Zeile 3 und 2 v. u. des Referats muß es „von  $n$  Veränderlichen“ und „von  $n$  Zeigern  $m_1, \dots, m_n$ “ statt „zweier Veränderlichen“ und „von zwei Zeigern  $m$  und  $n$ “ heißen.

**Oxtoby, John C.:** Ergodic sets. Bull. Amer. math. Soc. 58, 116—136 (1952); dies. Zbl. 46, 115—116.

Auf Seite 115 in Zeile 7 v. u. muß es heißen „measure  $\mu$  with  $\mu(\Omega) = 1$ “ an Stelle von „measure  $\mu$  with  $\mu(R) = 1$ “.

**Berry, V. J. and C. R. de Prima:** An iterative method für the solution of Eigenvalue problems. J. appl. Phys. 23, 195—198 (1952); dies. Zbl. 46, 136.

Im Titel der Arbeit lies „for“ statt „für“.

In Zeile 2 v. o. und in Zeile 3 v. u. des Referats lies „ $u'(1) = 0$ “ statt „ $u(1) = 0$ “.

**Leutert, Werner and George G. O'Brien:** On the convergence of approximate solutions of the wave equation to the exact solution. J. Math. Physics 30, 252—256 (1952); dies. Zbl. 46, 138.

In der Formel (3) muß auf der rechten Seite „ $r^2$ “ statt „ $r$ “ vor der eckigen Klammer stehen.

In der letzten Formelzeile (Zeile 4 v. u. des Referats) lies „ $\frac{Mt}{r}$ “ statt „ $\frac{\pi Mt}{r}$ “.

**Janenko, N. W.:** Über den Zusammenhang zwischen metrischen und projektiven Eigenschaften von Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 685—688 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 46, 153.

Der Verfasser der Arbeit heißt N. N. Janenko.

**Yang, Chung-Tao:** On cohomology theories. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 348—351 (1952); dies. Zbl. 46, 165—166.

Auf S. 165, in Zeile 2 v. u. lies „fully normal spaces“ statt „fully spaces“.

**Sturrock, P. A.:** The imaging properties of electron beams in arbitrary static electromagnetic fields. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 245, 155—187 (1952); dies. Zbl. 46, 207.

In Zeile 2 v. o. des Referates sind folgende Literaturangaben einzufügen: „M. Cotte (dies. Zbl. 19, 377) und G. Wendt [Z. Phys. 120, 720—740 (1943)]“.

**Rodeja F., E. G.-:** Note on determinants of sines and cosines. Proc. Amer. math. Soc. 3, 198—205 (1952); dies. Zbl. 46, 243.

Der Name des Referenten lautet: „T. Nakayama“ statt „J. Nakayama“.

**Korobov, N. N.:** Über normale periodische Systeme. Izvestija Akad. Nauk SSSR, n. Ser. mat. 16, 211—216 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 46, 278.

Der Verfasser der Arbeit heißt N. M. Korobov.

**Tims, W. R.:** Note on a paper by M. Nassif. Proc. London math. Soc., II. Ser. 54, 215—218 (1952); dies. Zbl. 46, 305.

Der Verfasser der Arbeit heißt S. R. Tims.

**Lelong-Ferrand, Jacqueline:** Sur certaines classes de représentations d'un domaine plan variable. J. Math. pur appl., IX. Sér. 31, 103—126 (1952); dies. Zbl. 46, 306—307.

Zur Berichtigung des am Schluß des Referats erwähnten typographischen Fehlers vgl. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 245—252 (1952).

**Viswanatham, B.:** On the existence of a solution of an infinite differential system. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 13—24 (1952); dies. Zbl. 46, 313—314.

Die Differentialgleichung in der letzten Zeile des Referats auf S. 314 ist zu lesen:  $dy^i/dx = \lambda^i y^i + f^i(x, y^1, y^2, \dots)$ .

**Malkin, I. G.:** Über die Konstruktion der Ljapunovschen Funktionen für Systeme linearer Gleichungen. Priklad. Mat. Mech. 16, 239—242 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 46, 317.

In den beiden ersten Zeilen des Referates lies „If the solutions . . . satisfy  $\|x(t)\| > M \|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}$ ,  $M, \alpha$  positive“, statt „If the characteristic numbers of the solutions . . . are all negative.“

**Müller, Claus:** Über die ganzen Lösungen der Wellengleichung. Math. Ann. 124, 235—264 (1952); dies. Zbl. 46, 325.

Die Formel in der letzten Zeile des Referats ist zu lesen:  $[i^{(1-p)/2} e^{ir} F(\xi_0) + i^{(p-1)/2} e^{-ir} F(-\xi_0)] \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{(p-1)/2}$ .

**Pachale, Helmut:** Über ein ebenes nichtlineares biharmonisches Randwertproblem. Math. Nachr. 7, 187—212 (1952); dies. Zbl. 46, 325—326.

In der Formel (3) muß unter dem Integralzeichen „ $dp$ “ statt „ $dS$ “ stehen.

**Mitrovic, Dusan:** Sur un principe nouveau de construction des machines électriques servant pour la recherche des racines des équations algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2519—2521 (1952); dies. Zbl. 46, 348—349.

Der Verfasser der Arbeit heißt **Dusan Mitrović**.

Auf S. 348 sind die Blöcke  $\square$  in Zeile 4 v. u. durch „ $\lambda$ “, in Zeile 3 v. u. durch „ $\mu$ “ (zweimal) zu ersetzen.

**Segre, Beniamino:** Variétés covariantes d'immersion et variétés canoniques sur une variété algébrique ou topologique. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1731—1733 (1952); dies. Zbl. 46, 388—389.

Auf S. 388 in Zeile 2 v. u. lies „ $(P_{V,j} \tilde{M}_{V,i-j})_M$ “ statt „ $(P_{V,j} M_{V,i-j})_M$ “.

Auf S. 389 in der drittletzten Zeile des Referats lies „ $1 \leq h \leq \frac{1}{2} v$ “ statt „ $1 = h = \frac{1}{2} v$ “.

**Kurita, Minoru:** Riemann space with two-parametric homogeneous holonomy group. Nagoya math. J, 4, 35—42 (1952); dies. Zbl. 46, 398.

In Zeile 2 v. o. des Referats lies „rotational“ statt „rational“.

Am Schluß des Referats ist hinzuzufügen: „These theorems follow also as direct consequences from a note by A. Borel and A. Lichnerowicz (cf. first review on this page).“

**Yano, Kentaro:** Some remarks on tensor fields and curvature. Ann. of Math., II. Ser. 55, 328—347 (1952); dies. Zbl. 46, 400.

In Zeile 6—7 v. o. des Referats lies „de Rham & Kodaira (Harmonic Integrals“ statt de Rham (Kodaira, Harmonic Integrals.“

In der ersten Formelzeile lies „ $dv$ “ statt „ $dV$ “ und in der darauf folgenden Zeile „the square“ statt „a sequence“.

**Gadd, G. E.:** Some hydrodynamical aspects of the swimming of snakes and eels. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 663—670 (1952); dies. Zbl. 46, 419.

Im Titel der Arbeit muß es heißen „snakes“ an Stelle von „smakes“.

**Kolmogorov, A. N.:** Zur Frage nach dem Widerstand und dem Geschwindigkeitsprofil bei turbulenter Strömung in Röhren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 38, 29—30 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 46, 424.

Die Arbeit steht in Band 84 der Zeitschrift.

**Fedorov, F. I.:** Die Bestimmung der optischen Parameter von einachsigen Kristallen am reflektierten Licht. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 1171—1174 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 46, 433—434.

Auf S. 433 in Zeile 3—4 v. o. des Referats lies „Brechungsindex  $n$  (bzw.  $n'$ ,  $n_0$ ,  $n_e$ ) und Einheitsvektor  $n$  (bzw.  $n'$ ,  $n_0$ ,  $n_e$ ) der Wellennormale der betreffenden Welle“ statt „Brechungsindex und Vektor der Wellennormale der gegebenen Welle“.

Auf S. 434 in Zeile 12 v. o. lies „ $\psi_2 = \psi_1 + \psi''$ “ statt „ $\psi = \psi_1 + \psi''$ “.

In Zeile 6 v. u. des Referats lies „notwendig“ statt „erfüllt“.

In der letzten Formel des Referats muß im Zähler „ $\varepsilon_0 (\varepsilon_e - n^2)$ “ statt „ $\varepsilon_0 (\varepsilon_0 - n^2)$ “ stehen.

Fieber, H., A. Nedoluha und K. M. Koch: Die Anomalie der galvano- und thermomagnetischen Transversaleffekte. Z. Phys. 131, 143—155 (1952); dies. Zbl. 46, 451. Die Arbeit steht auf S. 148—155 der Zeitschrift.

### Autorenregister:

Auf S. 457 Spalte 2 lies „Angles d'Auriac“ statt „Angles d'Aurinac“.  
 Auf S. 459 Spalte 2 lies Brelot, M. et „G.“ Choquet statt „C.“ Choquet.  
 Auf S. 459 Spalte 2 lies „Brooker“ statt „Brockner“.  
 Auf S. 463 Spalte 1 lies Foreman, A. J., „E.“ statt A. J., „R.“.  
 Auf S. 466 Spalte 3 lies Jaswon, M. A. and A. J., „E.“ Foreman statt A. J., „R.“ Foreman.  
 Auf S. 467 Spalte 2 lies Kazačkov, „B.“ V. statt „D.“ V.  
 Auf S. 470 Spalte 2 lies McLellan, A., „G.“ statt „C.“  
 Auf S. 471 Spalte 2 lies Morse, M. s. J. A., „Jenkins“ statt „Jonkins“.  
 Auf S. 473 Spalte 1 lies Pentkovskij, „M.“ V. statt „N.“ V.  
 Auf S. 476 Spalte 2 lies „Solow“ statt „Solov“.  
 Auf S. 478 Spalte 2 lies „Vakselj“ statt „Vaksebj“.

### Zu Band 47:

Johnson, R. E.: On ordered domains of integrity. Proc. Amer. math. Soc. 3, 414—416 (1952); dies. Zbl. 47, 31.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „ $R^* = P \cup (-1)P$ “ statt „ $R = P \cup (-1)P$ “.

Szele, T.: On ordered skew fields. Proc. Amer. math. Soc. 3, 410—413 (1952); dies. Zbl. 47, 31—32.

Auf S. 31 Zeile 5 v. u., und S. 32, Zeile 2 v. o. lies „ $K^*$ “ statt „ $K$ “.

MacKenzie, Robert E.: Class group relations in cyclotomic fields. Amer. J. Math. 74, 759—763 (1952); dies. Zbl. 47, 37.

In Zeile 14 v. o. des Referats lies „ $\lambda$ “ statt „ $\chi$ “.

Basu, N. M.: A note on partitions. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 27—30 (1952); dies. Zbl. 47, 43.

In Zeile 2 v. o. des Referats lies „in Summanden  $\leq s$ “ statt „in höchstens  $s$  Summanden“.

In Zeile 4 v. o. lies

$$'' \frac{1-\alpha}{\alpha^2(2-(s+1)\alpha^s)} \frac{1}{\alpha^{n-1}} '' \text{ statt } '' \frac{1-\alpha}{\alpha^2[2-(s+1)\alpha^s]} \alpha^{n-1} .''$$

Četković, Simon: Résolution d'un système infini des équations d'ensemble. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, 51—58 und französ. Zusammenfassg. 59 (1952) [Serbokroatisch]; dies. Zbl. 47, 56—57.

Die Arbeit steht in Band 4, Heft 1—2 der Zeitschrift.

Eine Berichtigung zu diesem Referat siehe V. Sedmak, dies. Zbl. 67, 27—28.

Reifenberg, E. A.: Parametric surfaces. III. The problem of Geoeze. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 227—234 (1952); dies. Zbl. 47, 60.

Der Verfasser der Arbeit heißt E. R. Reifenberg.

Jurkat, W. und A. Peyerimhoff: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z. 56, 151—178 (1952); dies. Zbl. 47, 64—65.

In der ersten Formelzeile des Referats auf S. 64 lies

$$'' M \cdot \max_{0 \leq \mu \leq n} \left\| \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} s_{\nu} \right\| '' \text{ statt } '' M \cdot \max_{0 \leq \mu \leq n} \left\| \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{n\nu} s_{\nu} \right\| ''.$$

San Juan, Ricardo: Une propriété générale des classes quasi-analytiques et des développements asymptotiques dans des demi-plans. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 282—284 (1952); dies. Zbl. 47, 79.

In Zeile 2, 4 und 5 v. o. des Referats lies „ $C\{M_n\}$ “ und in Zeile 3 und 5 v. o. „ $C\{M_n^*\}$ “ statt „ $c\{M_n\}$ “ bzw. „ $c\{M_n^*\}$ “.



**El'sgol'e, L. E.:** Variationsrechnung. (Physikalisch-mathematische Bibliothek des Ingenieurs.) Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 167 S. R. 5,50 [Russisch]; dies. Zbl. 47, 98.

Die korrekte Transkription für den Namen des Verf. ist L. É. Él'sgol'e.

**Akivis, M. A.:** Ein invarianter Aufbau der Geometrie der Hyperflächen des konformen Raumes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 325—328 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 47, 152—153.

Auf S. 152, in Zeile 3. v. o. des Referats lies „ $(x^0)^{2''}$ “ statt „ $(x_0)^{2''}$ “.

In der darauffolgenden Zeile 4 ist der Satz: „Wir denken uns die Kugeln durch  $(x, x) = 1$  normiert.“ zu streichen.

In Zeile 6 v. u. derselben Seite ist nach „also  $(a_n, a_i) = 0$ “ folgender Satz einzufügen: „Wir normieren noch  $(a_0, a_{n+1}) = 1$ ,  $(a_n, a_n) = 1$ .“

In Zeile 5 v. u. ist „ $da_\alpha = \omega_\alpha^\beta a_\gamma$ “ an Stelle von „ $da_\alpha = \omega_\alpha^\beta a_\beta$ “ zu setzen.

Auf S. 153, in Zeile 5 bis 4 v. u. muß es statt „so sind  $S$  und  $S'$  isometrisch“ heißen „so stimmen auf  $S$  und  $S'$  die Krümmungslinien überein“.

**Vorobjev, N. N.:** Der konstruktive Aussagenkalkül mit starker Negation. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 465—468 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 47, 251—252.

Die korrekte Transkription für den Namen des Verf. ist N. N. Vorob'ev.

**Masuda, Katsuhiko:** Direct decompositions of Galois algebras. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 122—130 (1952); dies. Zbl. 47, 269.

In Zeile 8 v. o. des Referats lies „assoziierter“ statt „assoziierten“.

In Zeile 4 v. u. lies „entsteht“ statt „entstehen“.

In Zeile 2 v. u. lies „ $K/\Omega$ “ statt „ $K/\mathfrak{G}$ “.

**Roquette, Peter:** Arithmetische Untersuchung des abelschen Funktionenkörpers, der einem algebraischen Funktionenkörper höheren Geschlechts zugeordnet ist. Mit einem Anhang über eine neue Begründung der Korrespondenztheorie algebraischer Funktionenkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 144—178 (1952); dies. Zbl. 47, 270—271.

Auf S. 271, in Zeile 20 v. u. des Referats lies „ $K/\Omega$ “ statt „ $K/K$ “.

In Zeile 19 v. u. ergänze das Zitat durch „S. 199—252“ und „dies. Zbl. 51, 273“.

In Zeile 15 v. u. lies „ $K A/A$ “ statt „ $K K/K$ “.

In Zeile 11—10 v. u. lies „Multiplikator“ statt „Multiplikators“.

In Zeile 4 v. u. lies „gehörige“ statt „zugehörige“.

**Remak, Robert:** Über Größenbeziehungen zwischen Diskriminante und Regulator eines algebraischen Zahlkörpers. Compositio math. 10, 245—285 (1952); dies. Zbl. 47, 272—273.

Auf S. 273, in Zeile 16 v. o. lies „total-imaginär“ statt „nicht total-imaginär“.

**Whaples, G.:** Carathéodory's temperature equations. J. rat. Mech. Analysis 1, 301—307 (1952); dies. Zbl. 47, 298.

In Zeile 1—2 v. o. des Referats muß es richtig heißen „bei denen  $(x, x') \in R_{ik}$  dasselbe bedeutet wie  $(x', x) \in R_{ki}$ “.

In Zeile 6 v. u. lies „ $G^*$ “ statt „ $G_1^*$ “.

**Balangadharan, K.:** A quasi-tauberian theorem on Fourier series. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 183—190 (1952); dies. Zbl. 47, 300—301.

In der 1. Formel der letzten Zeile auf Seite 300 lies „ $S^0(t)$ “ statt „ $S(t)$ “.

In Zeile 5 v. o. auf S. 301 ist hinter „ $(2)$ “ ein Komma zu setzen.

**Tomić, M.:** Sur les sommes trigonométriques à coefficients monotones. Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova, mat. Inst. 18, Nr. 2, 13—51 und französ. Zusammenfassung. 51—52 (1952) [Serbisch]; dies. Zbl. 47, 306—307.

Auf S. 307, in Zeile 2 v. u. des Referats lies „ $\sum c_v e^{v g i}$ “ statt „ $\sum c_v e^{v i}$ “.

**Palamà, Giuseppe:** Su di un limite inferiore della distanza di due zeri consecutivi di  $H_n(x)$  e su di una limitazione di  $H_n^2(x) - H_{n-1}(x) H_{n+1}(x)$ . Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 311—315 (1952); dies. Zbl. 47, 308.

In Zeile 3 und 4 v. o. des Referats lies „ $n!$ “ statt „ $n_n!$ “.

**Tanaka, Chuji:** Note on Dirichlet series. IX. Remarks on J. J. Gergen-S. Mandelbrojt's theorems. Proc. Japan Acad. 28, 73—76 (1952); dies. Zbl. 47, 314.

In Zeile 1 und 2 v. o. des Referats ist an Stelle von „In Verallgemeinerung J. Mandelbrojtscher Ergebnisse beweist Verf. z. B.:“ zu setzen:

„Gergen und Mandelbrojt (dies. Zbl. 1, 22) gaben Existenzsätze für Julia-sche Richtungen ganzer Funktionen, die durch Dirichletsche Reihen mit endlicher oberer Dichte  $\lim n/\lambda_n$  der Exponentenfolge definiert sind (s. auch Mandelbrojt, Dirichlet series, Rice Inst. Pamphlet 1944). Verf. zeigt die Existenz von Juliarichtungen unter neuen Voraussetzungen und beweist den Satz:“

In der vorletzten Zeile des Referates muß es heißen „in der Halbebene“ an Stelle von „im Streifen“.

**Ajzenstat, N. D.:** Über die Abschätzung des Fehlers bei der angenäherten Lösung der Poissonschen Differenzengleichung. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 485—490 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 47, 333.

Die korrekte Transkription für den Namen des Verf. ist N. N. Ajzenštat.

**Knopp, Konrad:** Zwei Abelsche Sätze. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 4, 89—94 (1952); dies. Zbl. 47, 349.

In der Formelzeile ist das Zeichen „ $=$ “ durch „ $\sim$ “ zu ersetzen.

**Krasnosel'skij, M. A. und S. G. Krejn:** Ein Iterationsprozeß mit minimalen Abweichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 315—334 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 47, 362.

In Zeile 4 v. o. lies „( $s_k$  real,  $\alpha_k > 0$ )“ statt „( $s_k$  real,  $\alpha_k > 0$ )“.

**Wild, John J.:** High-speed printer for computers and communications. Electronics 25, 116—120 (1952); dies. Zbl. 47, 369.

Die Arbeit steht in Heft 5 des Bandes.

**Darling, D. A.:** The influence of the maximum term in the addition of independent random variables. Trans. Amer. math. Soc. 73, 95—107 (1952); dies. Zbl. 47, 375.

In Zeile 2 v. o. des Referats lies „ $\sup \varrho > 0$ “ statt „ $\sup \varrho \geq 0$ “.

**Page, Chester H.:** Instantaneous power spectra. J. appl. Phys. 23, 103—106 (1952); dies. Zbl. 47, 377.

In Zeile 11 v. o. des Referats lies  $\varrho(t, f) = 2 \frac{\sin 2\pi f t}{2\pi f}$  an Stelle von  $\varrho(t, f) = 2(\sin 2\pi f t)/2\pi f$ .

**Birnbaum, Z. W.:** Numerical tabulation of the distribution of Kolmogorov's statistic for finite sample size. J. Amer. statist. Assoc. 47, 425—441 (1952); dies. Zbl. 47, 381—382.

In Zeile 6 v. o. des Referats soll vor der Summe der Faktor „ $\frac{1}{e}$ “ statt „ $\frac{1}{e}$ “ stehen.

**Goormaghtigh, M. R.:** Sur le quadrilatère complet. Mathesis, Suppl. 61, 1—16 (1952); dies. Zbl. 47, 392.

Der Verfasser der Arbeit heißt R. Goormaghtigh.

**Godeaux, Lucien:** Une généralisation des surfaces desmiques. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 892—897 (1952); dies. Zbl. 47, 400.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „ $\sum x_i^{4n}$ “ statt „ $\sum x_i^{4ng}$ “.

**Hara, Osamu and Haruo Shimazu:** A new attempt on the self energy problem of the photon. Progress theor. Phys. 8, 265—279 (1952); dies. Zbl. 47, 449.

In Zeile 7 v. o. des Referats lies „Formulierung“ statt „Formalisierung“.

#### Autorenregister:

Auf S. 458, Spalte 1 ist unter Agnew hinter (Tauberian series) die Seitenzahl „64“ durch „65“ zu ersetzen.

Auf S. 463, Spalte 2 ist unter Ellis hinter (Abstract distance geometry. III). die Seitenzahl „254“ durch „255“ zu ersetzen.

Auf S. 465, Spalte 2, lies Goormaghtigh, „R.“ statt „M. R.“.

#### Zu Band 48:

**Eaves, J. C.:** On sets of matrices having a delayed commutativity property. J. Elisha Mitchell Sci. Soc. 68, 46—54 (1952); dies. Zbl. 48, 9.

In der ersten Zeile des Referats lies „ $n \times n$ -Matrizen  $A, B$  mit komplexen Elementen“ statt „ $n \times n$ -Matrizen  $A, B$ “.

In Zeile 4 v. o. des Referats ist „im Falle komplexer Elemente“ zu streichen.

Am Schluß des Referats ist hinzuzufügen: „(Bemerkung: Beide Sätze sind in dem klassischen Ergebnis von Lie enthalten, nach dem jeder auflösbare Liesche Ring von komplexen Matrizen auf die Dreiecksform transformiert werden kann.)“

**Sato, Shoji:** On the lattice homomorphisms of infinite groups. I. Osaka math. J. 4, 229—234 (1952); dies. Zbl. 48, 14.

In Zeile 2 v. u. des Referats lies „intersection of  $N$  and the center of  $G$ “ statt „intersection of the centers of  $N$  and  $G$ “.

**Dynkin, E. B.:** Der Zusammenhang zwischen den Homologien einer kompakten Lieschen Gruppe und ihrer Untergruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 333—336 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 48, 21.

In Zeile 9 v. u. des Referats lies „null-homologen“ statt „null-homogenen“.

**Kurepa, Djuro:** Sur la relation d'inclusion et l'axiome de choix de Zermelo. Bull. Soc. math. France 80, 225—232 (1952); dies. Zbl. 48, 35.

In Zeile 5 v. o. des Referats lies „278“ statt „578“.

Das Zitat in Zeile 9—10: v. o. ist zu ergänzen durch „dies. Zbl. 52, 26“.

In Zeile 7 v. u. des Referats ist das Wort „beide“ zu ersetzen durch „, sowie (was Verf. in der Definition zu erwähnen vergaß) der Durchschnitt  $A \cap B$ “.

**Plessis, Nicolaas du:** A theorem about fractional integrals. Proc. Amer. math. Soc. 3, 892—898 (1952); dies. Zbl. 48, 38.

In der ersten Zeile des Referats lies „d'ordre  $\alpha/q$  de  $f$  ( $0 < \alpha < 1$ )“ statt „d'ordre  $\alpha/q'$  de  $f$  [ $0 < \alpha < 1$ ,  $q' = q/(q-1)$ ]“.

**Krasnosel'skij, M. A. und Ja. V. Rutickij:** Lineare Integraloperatoren in Orliczischen Räumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 33—36 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 48, 94—95.

Der zweite Verfasser der Arbeit heißt Ja. B. Rutickij.

**Karush, W.:** Convergence of a method of solving linear problems. Proc. Amer. math. Soc. 3, 839—851 (1952); dies. Zbl. 48, 95.

In Zeile 2—1 v. u. des Referats lies: „abgeschlossenen beschränkten Menge“ statt „beschränkten Menge“.



- Rothe, E. H.:** Leray-Schauder index and Morse type numbers in Hilbert space. Ann. of Math. II. Ser. **55**, 433—476 (1952); dies. Zbl. **48**, 97.  
 In Zeile 3 v. o. des Referates u. lies „ $i(\mathfrak{x})$ “ statt „ $i(\varphi)$ “.  
 In Zeile 5 v. u. lies „ $\{||\mathfrak{x}|| = \varrho\}$ “ statt „ $\{||\mathfrak{x}|| = p\}$ “.
- Underwood, R. S.:** Functions of  $n$  variables in extended analytic geometry. Amer. math. Monthly **59**, 453—460 (1952); dies. Zbl. **48**, 142.  
 In Zeile 3 v. o. des Referates lies „97“ statt „57“.
- Bochner, S. and K. Yang:** Tensor-fields in non-symmetric connections. Ann. of Math., II. Ser. **56**, 504—519 (1952); dies. Zbl. **48**, 158.  
 Der zweite Verfasser der Arbeit heißt **K. Yano**.
- Dirac, P. A. M.:** A new classical theory of electrons. II. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **212**, 330—339 (1952); dies. Zbl. **48**, 204.  
 In Zeile 5 v. o. des Referats lies „54 (1857)“ statt „45 (1857)“.  
 In Zeile 6 v. o. lies „ $\partial y / \partial x_\mu$ “ statt „ $\partial y / \partial x$ “.
- Buneman, O.:** Circulation in the flow of electricity. Dirac's new variables. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **215**, 346—352 (1952); dies. Zbl. **48**, 204.  
 In der letzten Zeile des Referats lies „Wirbellinie“ statt „Wellenlinie“.
- Wait, James R.:** Electromagnetic fields of current-carrying wires in a conducting medium. Canadian J. Phys. **30**, 512—523 (1952); dies. Zbl. **48**, 207—208.  
 Auf S. 208, in Zeile 2—1 v. u. des Referats lies am Anfang des letzten Satzes: „Zwischen dem zuerstgenannten und dem zuletztgenannten Leiter“.
- Ueno, Yoshio and Hyôitirô Takeno.** On equivalent observers. Progress theor. Phys. **8**, 291—301 (1952); dies. Zbl. **48**, 215.  
 In Zeile 1 v. o. des Referats lies „L'intention“ statt „L'intension“.  
 In Zeile 1—2 v. o. lies „équivalents“ statt „équivalent“.  
 In Zeile 3 v. o. lies „extension“ statt „un tension“.  
 In Zeile 3 v. u. fehlt vor „géométrie“ das Anführungszeichen.
- **Bohm, D.:** Quantum theory. London: Constable & Co. Ltd., 1951. 646 p. 45 s.; dies. Zbl. **48**, 218.  
 In Zeile 7 v. o. des Referats lies „Meßprozesses“ statt „Mesonenprozesses“.
- Corben, H. C.:** A reformulation of field theory. Nuovo Cimento, Ser. IX **9**, 580—596 (1952); dies. Zbl. **48**, 221.  
 In Zeile 3 v. o. des Referats lies „Quantenelektrodynamik“ statt „Quantenelektronendynamik“.
- Fubini, S.:** Sull'operatore  $U(t)$  di Dyson-Feynman. Nuovo Cimento, Ser. IX **9**, 846—851 (1952); dies. Zbl. **48**, 222—223.  
 Auf S. 223, in Zeile 3 v. u. des Referats lies „anharmonischen“ statt „harmonischen“.
- Lévy, Maurice N.:** Non-adiabatic treatment of the relativistic two-body problem. Phys. Review, II. Ser. **88**, 72—82 (1952); dies. Zbl. **48**, 224.  
 Der Verfasser heißt **Maurice M. Lévy**.
- Laurikainen, K. V.:** Asymptotic eigensolutions of the radial deuteron equation. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. **130**, 10 S. (1952); dies. Zbl. **48**, 229.  
 Lies „jedoch ohne Beschränkung“ statt „Beschränkung“.
- Mandelbrojt, S.:** Quelques nouveaux théorèmes de fermeture. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 241—251 (1952); dies. Zbl. **48**, 303.  
 In Zeile 5, 7 und 9 v. o. des Referats ist „ $D_0$ “ durch „ $D_\bullet$ “ zu ersetzen.  
 In Zeile 5 v. o. lies „borne“ statt „borne“.  

$$\begin{array}{cc} x \geq t & x \leq t \end{array}$$

In Zeile 7 v. o. lies „ $\bigcup_{x \in E}$ “ statt „ $\bigcup_{X \in E}$ “.

In Zeile 8 v. o. lies „ $M_n$ “ statt „ $M_0$ “.

**Castro Brzezicki, A. de:** Über die Differentialgleichungssysteme der nicht-linearen Mechanik. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. **12**, 317—329 (1952) [Spanisch]; dies. Zbl. **48**, 328.

In der ersten Zeile des Referats lautet die zweite Gleichung: „ $\dot{y} = -xg(t) + f(y, t)$ “.

**Yosida, Kôzaku:** On Cauchy's problem in the large for wave equations. *Proc. Japan Acad.* **28**, 396—403 (1952); dies. Zbl. **48**, 334—335.

Auf S. 335, in Zeile 4—3 v. u. des Referats ist der Satz „Das Lemma 2 . . . nicht einwandfrei.“ zu streichen. (Mitteilung des Referenten.)

**Bose, N. N.:** On MacRobert's  $E$ -function. *Bull. Calcutta math. Soc.* **44**, 63—68 (1952); dies. Zbl. **48**, 346—347.

Der Verfasser der Arbeit heißt **B. N. Bose**.

**Fenchel, W.:** A generalization of spherical trigonometry. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 139—147 (1952); dies. Zbl. **48**, 375—376.

Der Referent der Arbeit heißt *C. F. Manara*.

**Barner, Martin:** Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare. *Math. Z.* **56**, 409—442 (1952); dies. Zbl. **48**, 392—393.

Auf S. 392, in Zeile 3 v. o. des Referats muß es heißen: „ $\sigma(t)$  den Schnittpunkt der Tangente von  $\bar{w}(t)$  mit der Schmiegenebene von  $w(t)$ “.

**Hlawka, Edmund:** Über eine Klasse von mehrfachen Integralen. *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg* **18**, 53—69 (1952); dies. Zbl. **48**, 407.

In der 8. Zeile v. u. muß es unter dem Integralzeichen heißen „ $|\Phi(r)|$ “ statt „ $|\Phi(x)|$ “.

● **El Badraway, Rashad M.:** Ebene Plattengitter bei Überschallgeschwindigkeit. *Diss. Zürich: Verlag Leemann* 1952. 90 S., Fr. 15,00; dies. Zbl. **48**, 430—431.

Der Verf. heißt **Rashad M. El Badrawy**.

#### Autorenregister:

Auf S. 461, Spalte 3, lies Bochner, S. und K. „Yano“ statt „Yang“.

Auf S. 462, Spalte 1, lies Bose, „B.“ N. statt „N.“ N.

Auf S. 462, Spalte 1, lies Brechovski, L. „M.“ statt L. „H.“

Auf S. 466, Spalte 3, ist unter Green hinter (Families of sets) die Seitenzahl „87“ durch „86“ zu ersetzen.

Auf S. 468, Spalte 2, lies Ivanov, I. D. s. L. „M.“ Brechovski statt L. „H.“

Auf S. 480, Spalte 2, lies „Yano“, K. statt „Yang“.

#### Zu Band 49:

**Sostak, R. Ja.:** Aleksej Vasil'evič Letnikov. *Istoriko-mat. Issledovanija* **5**, 167—238 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. **49**, 5.

Der Verfasser der Arbeit heißt **R. Ja. Šostak**.

**Nagata, Masayoshi:** On the nilpotency of nil-algebras. *J. math. Soc. Japan* **4**, 296—301 (1952); dies. Zbl. **49**, 24—25.

Auf S. 24, in Zeile 2 v. o. des Referats lies „hold“ statt „holds“.

Auf S. 24, in Zeile 2. v. u. muß es heißen: „ $\sum_{\sigma \in S} y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(n)} = 0$ “.

Carlitz, L.: A problem of Dickson. Duke math. J. 19, 471—474 (1952); dies. Zbl. 49, 32.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „ $F(x) = H^2(x)$ “ statt „ $F(x) = H^n(x)$ “.

Carlitz, L.: Sums of primitive roots in a finite field. Duke math. J. 19, 459—468 (1952); dies. Zbl. 49, 32.

In der vorletzten Zeile des Referats lies „ $\varphi^r$ “ statt „ $\Phi^r$ “.

Žak, I. E.: Zu einem Satz von L. Cesari über konjugierte Funktionen von zwei Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 877—880 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. 49, 50.

Am Ende der Zeile 8 v. u. des Referats lies „or  $Q'$ “ statt „or“.

Bagchi, Hari Das and Bhoda Nath Mukherji: Note on a sequence of functions, defined by a difference-equation. Simon Stevin 29, 185—189 (1952); dies. Zbl. 49, 51.

Der zweite Verfasser der Arbeit heißt Bhola Nath Mukherji.

Haefeli, Hans Georg: I funzionali lineari delle funzioni analitiche di una variabile quaternionale. Rend. Accad. naz. XL, Ser. IV 2, 65—110 (1952); dies. Zbl. 49, 64.

In der letzten Zeile des Referats muß es heißen: „ $F[(\xi - \bar{x})/n(\xi - x)]$ “.

Campbell, J. C.: A criterion for the polynomial solutions of a certain Riccati equation. Amer. math. Monthly 58, 388—389 (1952); dies. Zbl. 49, 68.

Die Arbeit steht in Band 59 der Zeitschrift.

Barbuti, Ugo: Sulla stabilità delle soluzioni per la equazione:  $x'' + B(t)x = 0$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 170—175 (1952); dies. Zbl. 49, 68.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „ $L$ -integrable“ statt „ $L^*$  integrable“.

Girlich, Albert A.: Test pulse generator for digital computers. Electronics 25, 158—160 (1952); dies. Zbl. 49, 94.

Der Verfasser der Arbeit heißt Albert A. Gerlach.

Die Arbeit steht in Heft 11 des Bandes.

Placker, L. and W. J. Wray jr.: „Germanium photo-diodes read computer tapes“. Electronics 25, 150—151 (1952); dies. Zbl. 49, 94.

Der 1. Verfasser der Arbeit heißt L. Packer.

Die Arbeit steht in Heft 11 des Bandes.

Koppel, Herbert: Digital computer plays nim. Electronics 25, 155—157 (1952); dies. Zbl. 49, 94.

Die Arbeit steht in Heft 11 des Bandes.

King, Edgard P.: The operating characteristic of the control chart sample means. Ann. math. Statistics 23, 384—395 (1952); dies. Zbl. 49, 101.

Im Titel der Arbeit lies „chart for sample“ statt „chart sample“.

Ogawa, Junjiro: Analytical derivation of sampling distribution of intraclass correlation coefficient. Osaka math. J. 4, 69—76 (1952); dies. Zbl. 49, 104.

Die zitierte Arbeit von R. A. Fisher steht in Metron 1, pt. 4, 1—32 (1921).

Tonooka (Tonowoka), Keinosuke: Geometrical treatment of an  $(n-1)$ -ple integral. Tensor, n. Ser. 2, 108—122 (1952); dies. Zbl. 49, 119.

In der letzten Zeile des Referats lies „ $F^2$ “ statt „ $F_2$ “.

Katsurada, Yoshie: Specialization of the theory of a space of higher order. II. On the extended Lie derivative. Tensor, n. Ser. 2, 15—26 (1952); dies. Zbl. 49, 121—122.

Auf S. 122, in Zeile 9 v. u. (zweimal) ferner in Zeile 5 und 2 v. u. des Referats ist „ $x$ “ durch „ $X$ “ zu ersetzen.



**Hadwiger, H.:** Additive Funktionale  $k$ -dimensionaler Eikörper. I. Arch. der Math. **3**, 470—478 (1952); dies. Zbl. **49**, 122—123.

Auf S. 123, in Zeile 2 v. o. lies „ $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ “ statt „ $\varphi(A) \geq \varphi(B)$ “.

**Greco, Donato:** Criteri di compattezza per insiemi di funzioni in  $n$  variabili indipendenti. Ricerche Mat. **1**, 124—144 (1952); dies. Zbl. **49**, 167—168.

Auf S. 168, in Zeile 5 v. o. lies „ $p = 1$ “ statt „ $p = s$ “.

In Zeile 6 v. o. lies „generalizzando“ statt „applicando“ und „atto“ statt „atta“.

In Zeile 7 bzw. 8 v. o. lies „ $u$ “ statt „ $U$ “ und „all'esponente“ statt „allo esponente“.

**Balasubramanian, N.:** Some identities of operators and their applications. Math. Student **20**, 74—76 (1952); dies. Zbl. **49**, 169.

Am Anfang der vorletzten Zeile des Referats lies „ $\alpha_{r,s}$ “ statt „ $\alpha_{r,s}$ “.

**Baiada, Emilio:** Un metodo di sommazione per le serie di funzioni ortonormali. Ricerche Mat. **1**, 107—123 (1952); dies. Zbl. **49**, 169—170.

In Zeile 1 v. o. des Referats lies „ortonormale“ statt „ortnormale“.

In Zeile 8 v. o. lies „somma“ und „rettangoli“ statt „soma“ und „rettangoli“.

In Zeile 9 v. o. lies „sommabile“ statt „summabile“.

Auf S. 169, Zeile 3 v. u. lies „ $g_i^{(m)}$ “ statt „ $g_i^{m'}$ “.

**Trochimčuk, Ju. Ju.:** Zur Theorie der Folgen von Riemannschen Flächen. Ukrain. mat. Žurn. **4**, 49—56 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. **49**, 180.

In der zweiten Zeile des Referats muß es richtig heißen: „Die Fläche  $F_n$  entsteht aus  $\bar{F}_n$ “.

**Trochimčuk, Ju. Ju.:** Über Folgen analytischer Funktionen und Riemannscher Flächen. Ukrain. mat. Žurn. **4**, 431—446 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. **49**, 180.

In Zeile 3 v. u. des Referats lies „to find the relation“ statt „to the relation“.

**Trochimčuk, Ju. Ju.:** Über hebbare Randmengen. Ukrain. mat. Žurn. **4**, 312—322 (1952) [Russisch]; dies. Zbl. **49**, 180.

In Zeile 3 v. u. des Referats lies „cuts  $\Gamma$ “ statt „cuts“.

**Graffi, Dario:** Sulle oscillazioni forzate nella meccanica non-lineare. Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 317—236 (1952); dies. Zbl. **49**, 185.

In Zeile 6 v. o. des Referats lies unter dem Wurzelzeichen „ $4 p^2 \omega^2$ “ statt „ $4 p \omega^2$ “.

In Zeile 2 v. u. lies „limitazioni“ statt „limizationi“.

**Pogorzelski, W.:** Remarques sur un problème mixte concernant l'équation des télégraphistes. Prace mat.-fiz. **48**, 59—66 (1952); dies. Zbl. **49**, 189.

In Zeile 1 v. o. des Referats lies „equazioni“ statt „equiazioni“.

In Zeile 3 v. o. lies „problema“ statt „probleme“.

In Zeile 5 v. u. lies in Formel (4): „ $\lim_{s \rightarrow \infty} U(s, t)$ “ statt „ $\lim_{s \rightarrow 0} U(s, t)$ “.

**Sarkar, B. N.:** Graduation of birth rates. Bull. Inst. internat. Statist. **33**, Nr. 2, 93—104 (1952); dies. Zbl. **49**, 225.

Die Arbeit steht in Band **33**, Nr. 4 der Zeitschrift.

**Gaeta, Federico:** Sulle rigate doppie di genere lineare assoluto  $p^{(1)} = 1$ . Rend. Accad. naz. XL, Ser. IV **2**, 23—63 (1952); dies. Zbl. **49**, 228—229.

Auf S. 229, in Zeile 13 v. u. des Referats lies „Typus III“ statt „Typus III“.

**Gale, David:** An indeterminate problem in classical mechanics. Amer. math. Monthly **59**, 291—295 (1952); dies. Zbl. **49**, 245.

Die Korrektur des in der Redaktion gekürzten Referats hat den Referenten nicht erreicht. Die Schriftleitung bedauert, daß ein Text veröffentlicht worden ist, der nicht die Billigung des Referenten gefunden hat. Das Referat ist durch den folgenden Zusatz zu ergänzen.

*E. Pannwitz.*

Il ne s'agirait donc nullement d'indétermination, même s'il était exact que le résultat de l'expérience dépendrait d'une manière discontinue de la position initiale des balles (respectivement de leurs masses, dans d'autres cas considérés par l'A.). Or il n'en est rien, puisque même pour des corps parfaitement élastiques, le choc a une durée finie, fonction de la vitesse (cf. A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4<sup>e</sup> éd. New-York 1944, p. 199), et que l'on ne peut négliger. C'est cette durée, qui engendre la possibilité, ignorée par l'A., d'un ensemble continu d'effets.

*A. Froda.*

**Peter, Lesky:** *Determinazione degli stati di tensione piana in un cilindro elastico a sezioni ellittiche.* Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 6, 255—267 (1952); dies. Zbl. 49, 248.

Der Verf. der Arbeit heißt **Peter Lesky**; in der Überschrift des Referates sind Vorname und Familienname vertauscht.

## Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren

Mitteilungen, so wird hinter dem mit römischen Ziffern angegeben.

Stichwort die Mitteilungsnummer

- Abascal, E. Vidal** s. Vidal  
Abascal, E. 115.
- Abdelhay, J. s. J. Dieudonné** 355.
- Abellanas, Pedro** (Orientation of algebraic varieties) 384.
- Abetti, B. B. s. G. Abetti** 145.  
— G. (Astronomy) 145.
- Achiezer, A. I. und R. V. Polovin** (Schwingungen des Plasmas) 432.
- N. I. (Markovs Momentenproblem) 199; (Ganze transzendenten Funktionen) 329; (Ganze Funktionen endlichen Grades) 329.
- Aczél, J.** (Poisson distributions. III.) 364.
- János (Kontinuierliche Gruppen) 91; (Équations fonctionnelles. II.) 210.
- Jean (Ungleichungen. II.) 152.
- Adam, P. Puig s. Puig Adam, P.** 94.
- Adamov, G. A.** (Strömung realer Gase) 418.
- Adcock, C. J.** (Cluster-directed analysis) 375.
- Adyanthaya, N. K.** (Fixation and regulation of wages) 226.
- Agostinelli, Cataldo** (Moto di rotolamento su un piano) 245; (Vibrazioni di una piastra) 256; (Configurazione di equilibrio) 257; (Figure di equilibrio) 443.
- Agudo, Fernando Roldão Dias s. Dias Agudo, Fernando Roldão** 108, 295.
- Ahlfors, Lars V. and A. Beurling** (Conformal invariants) 177.
- Aikawa, Sanzō** (Schwarz's theorem) 65.
- Aissen, Michael, I. J. Schoenberg and A. M. Whitney** (Totally positive sequences. I.) 172.
- Aitken, A. C. (J. H. M. Wedderburn)** 291.
- Akaike, Hirotugu s. K. Matusita** 101.
- Albada, G. B. van** (Integral of angular momentum) 441.
- Albert, A. A.** (Power-associative algebras) 24.
- Albuquerque, J. Ribeiro de s. Ribeiro de Albuquerque, J.** 317.
- Aleksandrjan, E. A.** (Torsion eines Doppel-T-Balkens) 249.
- Aleksandrov, A. D.** (Einsteinisches Paradoxon) 138; (Dreiecke im metrischen Raum) 395.
- Alexander, S. N.** (Automatic Computer) 362.
- Alexandroff (Aleksandrov), P. S.** (Sowjetische Topologie) 123.
- — —, A. I. Markušević und A. Ja. Chinčín (Elementarmathematik. III.) 33.
- Alexiewicz, A.** (Vector valued functions) 84.
- Alexits, György** (Lebesguesche Funktionen) 47.
- Allen, A. C.** (Harmonic functions) 352.
- D. N. de G. (Efficiency of heat regenerators) 264.
- Allendoerfer, Carl B.** (Differentiable manifolds) 402.
- Allis, W. P. and Sanborn C. Brown** (Breakdown of gases) 432.
- Almeida Costa, A.** (Unterdirekte Modulsummen) 20; (Multiplikative assoziative Bereiche) 20.
- Ambarcumjan, S. A.** (Temperaturspannungen) 411.
- V. A. (Wahrscheinlichkeit der Systeme vom Typus Trapez des Orion) 287.
- Amerio, Luigi** („Nodo a stella“ e „fuoco“) 72.
- Amitsur, S. A.** (Radicals. I.) 303.
- Andelić (Angelitch), T. P.** (Tensorenrechnung) 389.
- Anderson, R. L. and T. A. Bancroft** (Statistical theory) 98.
- Andreoli, Giulio** (Matematiche superiori. I.) 294.
- Andreotti, Aldo** (Superficie algebriche) 110; (Varietà di Picard) 111.
- Ankeny, N. C., E. Artin and S. Chowla** (Class-number) 306.
- Antončik, E. and M. Trlifaj** (Valency electrons in a crystal) 286.
- Aoyama, Hirojiro** (Systematic sampling) 222.
- Apostle, H. G.** (Aristotle's philosophy of mathematics) 2.
- Appel, Valentine** (Nomographs for testing the significance of difference between uncorrelated percentages) 374.
- Arató, Mátyás et Géza Freud** (Intégrales d'interaction) 280.
- Arf, C.** (Frontière libre d'élasticité) 252; (Methods of Rayleigh-Ritz-Weinstein) 359.
- Arghiriade, Em.** (Surfaces de Čech) 115.
- Aronszajn, N.** (Applied functional analysis) 73.
- Artin, E. s. N. C. Ankeny** 306.
- Aruffo, Giulio** (Forme differenziali esterne. I. II.) 72.
- Arutjunjan, N. Ch.** (Théorie des Kriechens) 257.
- Aržanyč, I. S.** (Integraldarstellung des Feldvektors) 243.
- Asano, Keizo und Takasaburo Ukegawa** (Arithmetik in Schieftringen) 304.
- Ascari, Aldo** (Equazione alla dinamica del punto) 184.
- Ascoli, Guido** (Equazioni differenziali non lineari) 184; (Formula asintotica di Laplace) 319; (Integrale multiplo) 320.
- Asmus, E.** (Höhere Mathematik) 315.
- Aussem, M. V.** (Geometrie eines Doppelintegrals) 119.
- Avadhani, T. V.** (Lattice points) 33.
- Avakumović, Vojislav G.** (Équations différentielles) 186; (Randwertaufgabe) 347; (Schwingungsgleichung) 351.
- Ayers, J. Douglas and J. Perham Stanley** (Method of computing sums) 375.



- Ayoub, Christine Williams (Primary subgroups) 154.
- Bachmutskaja, È. Ja. (T. F. Osipovskij) 4.
- Backes, F. (Applicabilité projective des surfaces) 232.
- Bader, W. (Parametereinfluß) 408.
- Baer, Reinhold (Cohomology theory of a pair of groups) 14; (Linear algebra) 381.
- Bagchi, Hari das and Bhola Nath Mukherji (Sequence of functions) 51.
- S. N. s. R. Hosemann 435.
- Bagemihl, F. s. L. S. Pontryagin 399.
- Bahadur, R. R. ( $t$ -statistic) 100.
- Baiada, Emilio (Serie di funzioni ortonormali) 169; (Problemi di calcolo delle variazioni) 196.
- Baidaff, Bernardo I. (Kartographisches Problem) 405.
- Bairstow, Sir Leonhard s. W. F. Hilton 418.
- Balachandran, V. K. (Boolean algebras) 303.
- Balaguer, F. Sunyer s. Sunyer Balaguer, F. 171.
- Balasubramanian, N. (Identities of operators) 169.
- Ballieu, R. s. P. P. Gillis 213.
- Bancroft, T. A. s. R. L. Anderson 98.
- Barbilian, D. (Groupes sans torsion) 15.
- Barbuti, Ugo ( $x'' + B(t)x = 0$ ) 68.
- Barenblatt, G. I. (Instationäre Bewegungen) 419.
- Baron, Melvin L. s. Mario G. Salvadori 359.
- Baroncini, D. (Non-adiabatic method) 139.
- Barriol, J. (Mécanique quantique) 273.
- Barsotti, I. (Cycles of an algebraic variety) 227.
- Bartel, Kazimierz (Kotierte Projektion) 405.
- Bartels, R. C. F. and O. Laporte (Conformal mapping in conical supersonic flows) 335.
- Basu, D. (Minimum variance estimator) 102; (Point estimation) 102; (Admissible estimators) 102; (Linear functions of chance variables) 214; (Minimax approach to problem of estimation) 372.
- Battig, N. Estela F. de und Ernesto Lammel (Extrema unter Nebenbedingungen) 43.
- Beauregard, Olivier Costa de s. Costa de Beauregard, Olivier 261.
- Beck, F. (Supra- und Normalleiter) 440; (Supraleitung) 440; (Potential von Supraleitern) 440.
- Beck, L. J. (Method of Descartes) 4.
- Beckenbach, E. F. (edited by): Construction and applications of conformal maps) 174.
- — — and E. W. Graham (Complex variable theory) 175.
- Beckerley, J. G. (Nuclear science. I.) 428.
- Béda, Gyula (Problème de trajectoire) 246.
- Beevers, C. A. (Fourier strips) 436.
- — — and H. Lipson (Fourier strips) 436.
- Behlendorff, Erika (Wärmspannungen) 255.
- Behrbohm, Herman (Flat triangular wing) 135; (Lifting trapezoidal wing) 135.
- Belatini, Paul de (Morphology of electromagnetics) 265.
- Benado, Mihail (Ensembles partiellement ordonnés) 39; (Décomposition de l'algèbre) 158.
- Benedicty, Mario (Trasformazioni birazionali) 388.
- Bennet, B. M. (Preliminary tests of significance) 102.
- J. M. and J. C. Kendrew (Fourier syntheses) 361.
- Berezcki, Iona (Rekursive Funktion) 8.
- Berezanskij, Ju. M. (Fastperiodische Funktionen) 182.
- Berghuys, Johannes Jacobus Wilhelmus (Anschauliche Geometrie) 106.
- Bergman, S. and M. Schiffer (Potential-theoretic methods) 64; (Kernel functions in conformal mapping) 176.
- Stefan (Visualization of domains) 182; (Functions of several complex variables) 182.
- Bergström, Harald (Triangle inequality for matrices) 295.
- Berkeley, Edmund C. (Symbolic logic) 147.
- Berkovitz, Leonard D. (Trigonometric integrals) 323.
- Bernal, M. J. M. and S. F. Boys (Electronic wave functions. VII.) 429.
- Bernard, Jean-J. (Choc des molécules sphériques) 278.
- Bernštejn (Bernstein), S. N. (Regulär monotone Funktionen) 323.
- Berri, R. Ja. (Invariante der binären Formen) 153.
- Bers, Lipman (Minimal surfaces) 115; (Generalizations of conformal mapping) 338.
- Bertaut, Félix (Énergie électrostatique des réseaux ioniques) 284; (Errata) 284.
- Berti, Giuliana (Taglio nell'elasticità) 255.
- Bertiau, F. (Numerische Integrationsmethoden) 92.
- Beurling, A. s. L. V. Ahlfors 177.
- Bhatnagar, P. L. s. L. S. Kotahari 349.
- — — s. R. S. Kushwaha 443.
- — — s. Pyarelal 430.
- Bhattacharyya, A. ( $t$ -distribution) 220; (Problem of regression) 224.
- Bickley, W. G., L. J. Comrie, J. C. P. Miller, D. H. Sadler and A. J. Thompson (Bessel functions. II.) 94.
- Bieniek, M. (Dynamics of non-elastic bodies) 413.
- Bing, R. H. (Homeomorphism between spheres) 404.
- Birkhoff, Garrett (Lattice theory) 16.
- Blanchard, André (Variétés kählériennes) 401.
- Blaquière, A. (Oscillateurs non linéaires) 69; (Diagramme de Nyquist) 69.
- Blatt, John M. and Victor F. Weisskopf (Nuclear physics) 140.
- Blewett, J. P. (Radial focusing) 142.
- Bloch, Claude (Field theories) 277.
- Blumenthal, Leonard M. (Linear inequalities) 123; (Boolean geometry. I.) 226.
- Boas, Marie (Mechanical philosophy) 3.
- jr., R. P. (Partial sums of Fourier series) 47; (Entire functions) 173; (Integrability) 331.
- Bobrov, A. A. (Stochastisches Wachstum der Summen zufälliger Größen) 365.
- Bochner, S. (Gaussian sums and Tauberian theorems) 313; (Laplace operator) 351.

- Bochner, S and W. T. Martin (Hartogs' theorem) 64; (Local transformations) 65.
- Boerdijk, A. H. (Close-packing of equal spheres) 396.
- Bogoljubov, N. N. (Quantentheorie der Felder) 275.
- Bohr, Harald (Mathematical works. I — III.) 1; (Almost periodic functions) 67.
- Bompiani, Enrico (Immersione di una varietà) 234.
- Bonder, Julian (Représentations conformes et biunivoques d'un demi-plan) 62.
- Boole, George (Logic and probability) 8.
- Bopp, F. s. A. Sommerfeld 260.
- Borel, Émile (Fréquence des nombres premiers) 164.
- Borevič, Z. I. (Homologiegruppen) 299; (Homologiegruppen der  $p$ -Erweiterungen) 305.
- Borsuk, K. (Transformations en sphères) 241; (Mapping of 2-sphere onto itself) 403.
- Borůvka, O. (Gruppentheorie) 11.
- Bose, B. N. (Integrals involving hypergeometric functions) 52.
- P. K. (Probability integral) 215.
- Raj Chandra (Factorial designs) 99.
- S. K. (Laplace integral) 199.
- Böttcher, C. J. F. (Electric polarisation) 267.
- Bouckaert, L. s. P. P. Gillis 213.
- Bourbaki, N. (Algèbre. VI. VII.) 18; (Intégration) 317.
- Bourgin, D. G. (Separation of polyhedra) 107.
- Bowler, A. H. and H. P. Goode (Sampling inspection) 98.
- Boyd, A. V. and J. M. Hyslop (Strong summability) 321.
- Boys, S. F. s. M. J. M. Bernal 429.
- Bragard, L. (Géodésie dynamique. I.) 131.
- Bragg, W. L. (Structure factors) 436.
- Brauer, Richard (Representations of groups) 13.
- Brdička, Miroslav (Reflexion of light) 270.
- Brejcha, Josef (Square as a limit of quadrangles) 381.
- Bremermann, Hans-Joachim (Charakterisierung von Regularitätsgebieten) 338.
- Brickstock, A. and J. A. Pople (Spatial correlation. II.) 431.
- Bridgman, P. W. (Plastic flow and fracture) 256.
- Brinkley jr., Stuart R. s. R. W. Smith jr. 95.
- Brödel, W. (Kubische Gleichung) 295.
- Brodskij, M. L. (Summen von Mengen) 316.
- Broman, Arne (Mathematische Probleme) 1.
- Brousse, Pierre (Sur une équation de la mécanique des milieux continus) 193.
- Brown, G. E. (Bound-state perturbation) 277.
- Sanborn C. s. W. P. Allis 432.
- Bruining, H. s. P. Schagen 425.
- Brysk, Henry (Beta-decay) 141.
- Bryson, A. E. (Aerodynamic heating) 265.
- Buckens, F. (Tensions thermo-élastiques) 255; (Mobiles indéformables) 407.
- Bückner, Hans (Inequalities for solutions of linear differential equations) 344.
- Budden, K. G. (Radio atmosphere. I. II.) 269.
- Budó, A. (Dielektrische Relaxation) 282.
- Bureau, Werner (Grundmannigfaltigkeiten) 109.
- Burke, Paul J. (IBM computation of sums of products) 374.
- Bychovskij, M. L. (Grundformen der Fehlertheorie elektrischer Stromkreise) 361; (Genauigkeit elektrischer Netze) 361.
- Caccioppoli, Renato (Misura e integrazione. III.) 41.
- Cafiero, Federico (Funzioni misurabili) 168.
- Cahen, Gilbert (Équations différentielles non linéaires) 345; (Oscillateurs filtrés) 407.
- Caianiello, E. R. and S. Fubini (Algorithm of Dirac spurs) 274.
- Calabi, Lorenzo (Gruppi semisemplici di Lie) 402.
- Caldirola, P., R. Fieschi e P. Gulmanelli (Cosmic radiation) 142.
- Piero (Massa dell'elettrone) 265.
- Caldonazzo, Bruto (Ellissoidi di Maclaurin e di Jacobi) 257.
- Caligo, Domenico (Equazioni differenziali del secondo ordine) 341.
- Calleja, Pedro Pi s. Pi Calleja, Pedro 34, 405.
- Camm, G. L. (Star systems. II.) 442.
- Campbell, J. G. (Riccati equation) 68.
- Campedelli, Luigi (Singularità delle curve algebriche) 389.
- Campus, F. s. P. P. Gillis 213.
- Cansado, Enrique (Multi-stage sampling) 371.
- Carathéodory, C. s. L. Eulerus 195.
- Carletti, Ernesto (Forma  $F_m^n$ ) 310.
- Carlitz, L. (Number of solutions) 32; (Primitive roots) 32; (Problem of Dickson) 32; (Arithmetic function) 163; (Bernoulli polynomials) 163; (Bernoulli numbers) 163.
- Cartan, E. (Oeuvres. Pt. I, Vol. I. II.) 303.
- Henri (Fonctions analytiques) 64.
- et Jean-Pierre Serre (Espaces fibrés. II.) 401.
- Cartwright, M. L. (Non-linear vibrations) 246.
- Casorati, Felice (Opere. I. II.) 291.
- Cassina, Ugo (Calcolo di Genocchi-Peano) 4; (Connessi irriducibili e sulla nozione di arco) 125.
- Castro, Gustavo de (Bernoulli and Poisson variables) 214.
- Cattaneo, Carlo (Statica dei fili) 248.
- Cecconi, Jaurès (Teorema di Stokes) 40; (Differenziabilità) 168.
- Cesari, L. and T. Radó (Area theory) 40.
- Chaki, M. C. (Non-symmetric harmonic space) 393.
- Chakrabarty, N. K. (Generalization of Bateman's  $K$ -function) 51.
- Chakraborty, P. N. s. C. Chandra Sekar 46.
- Chalatnikov, I. (Statistische Summe) 261.
- M. (Wärmeaustausch). 283; (Kinetische Koeffizienten) 283; (Wärmeleitung und Schallabsorption) 283; (Lösungen fremder Teilchen in Helium II) 283.
- Chalmers, Bruce (edited by) (Metal physics. 3.) 439.
- Champion, K. S. W. (Gaseous arcs. I. II.) 432.
- Chanda, K. C. ( $L$ -test and Pitman's test) 221.

- Chandra, Dinesh (Whittaker transform) 199.  
 — Sekar, C. and P. N. Chakraborty (Orthogonal semi-polynomials) 46.  
 Chapman, Douglas G. (Ratio of Poisson means) 220.  
 — Sydney and T. G. Cowling (Non-uniform gases) 261.  
 Charazov, D. F. (Lineare Gleichungen in Hilbertschen Räumen) 88.  
 Charles, A. (Linear programming) 379.  
 Chartier, F. (Estimation statistique) 373.  
 Chatiaşvili, G. M. (Deformation eines Balkens) 249.  
 Chatterji, L. D. (Polytropic model of index unity) 443.  
 Chen, K. T. (Commutator calculus) 404.  
 — Kuo-Tsai (Isotopy invariants) 404.  
 — Yu Why (Supersonic flow) 259.  
 Chern, Shiing-shen (Fiber bundles) 242.  
 Cherubino, Salvatore (Famiglie di matrici) 10.  
 Chevalley, C. (Betti numbers) 157.  
 Chiaro, Adolfo del (Probabilità di eliminazione) 105.  
 Chin'ín, A. Ja. (Allgemeine Sätze der statistischen Physik) 420.  
 — — — s. P. S. Alexandroff 33.  
 Chmel'nickij, E. A. s. V. M. Rozov 365.  
 Chong, Frederick (Identification of a semi-infinite medium) 254.  
 Choudhury, P. (Test d'indépendance des moyennes et des écarts types) 371.  
 Chow, Wei-Liang (Abelian variety) 387.  
 Chowla, S. s. N. C. Ankeny 306.  
 Chu, Jun Tsu (Hermitian operators) 207.  
 Cicco, John de (Systems of curves) 406.  
 — — — s. Edward Kasner 77, 195.  
 Ciliberto, Carlo (Problema al contorno) 193.  
 Cinquini, Silvio s. M. Cinquini Cibrario 73.  
 — Cibrario, Maria e Silvio Cinquini (Problema di Cauchy) 73.  
 Ciorănescu, Nicolas (Procédé de la dichotomie) 317.  
 Clagett, Marshall s. Ernest A. Moody 145.  
 Clauser, Emilio (Trasformazioni nello spazio-tempo pseudoeuclideo) 273.  
 Clegg, J. A. s. Bernard Lovell 288.  
 Coburn, N. (Vorticity and velocity vectors) 258.  
 Cochran, W. (Signs of structure factors) 436; (Symmetry of real periodic functions) 436.  
 — — — F. H. C. Crick and V. Vand (Structure of synthetic polypeptides. I.) 437.  
 — — — and H. B. Dyer (Crystal-structure projections) 437.  
 Coddington, E. A. (Spectral representation) 71.  
 Coelho, Renato Pereira s. Pereira Coelho, Renato 124.  
 Cohen, Eckford (Arithmetic functions) 152.  
 Colino, Antonio (Mikrowellen) 423.  
 Collingwood, E. F. (Second fundamental inequality for meromorphic functions) 174.  
 Colloque de Topologie 239.  
 Colombo, G. (Aggiunto ad una nota precedente) 406.  
 — Giuseppe (Stabilità dei moti merostatici di un giroscopio) 406.  
 Comptes rendus du premier Congrès des Mathématiciens hongrois 1.  
 Comrie, L. J. s. W. G. Bickley 94.  
 Confetta, Anna Maria (Propagazione delle onde elettromagnetiche) 270.  
 Conforto, Fabio (Fonctions abéliennes) 110.  
 Connor, W. S. (Group divisible designs) 99.  
 Conte, Luigi (La sfida di Brook Taylor) 290.  
 Cooper, Eugene P. (Conformal mapping in flow phenomena) 335.  
 Corput, J. G. van der (Rechenmaschinen) 212.  
 Costa, A. Almeida s. Almeida Costa, A. 20.  
 — de Beauregard, Olivier (Potentiels retardés) 261.  
 Cotter, J. R. (Monatomic gas) 432.  
 Coulomb, J. (Ondes au fond de la mer) 414.  
 Courant, Ernest D., M. Stanley Livingston and Hartland S. Snyder (Strong-focusing synchrotron) 142.  
 Courant, R. (Flow patterns) 173.  
 Coutrez, R. s. P. P. Gillis 213.  
 — Raymond (Application du calcul des probabilités à l'astronomie) 441.  
 Cowling, T. G. s. Sydney Chapman 261.  
 — V. F. and G. Piranian (Dirichlet series) 54.  
 Craemer, H. (Ausnutzungslinien) 412; (Idealplastische Balken) 413.  
 Crick, F. H. C. s. W. Cochran 437.  
 Cristea, M. (Petits mouvements thermo-élastiques) 411.  
 Cristescu, N. (Mouvement du fil) 413.  
 — Romulus (Intégration dans les espaces semiordonnés) 85.  
 Cruickshank, D. W. J. (Fourier and least-squares methods) 436.  
 Császár, Ákos (Propriété de Darboux) 42.  
 Čudakov, N. G. und A. K. Pavljučuk (Charaktere von Zahlengruppen) 313.  
 Cuesta, N. (Projektive Strukturen) 382; (Korrelation) 383.  
 Cugiani, M. (Risultante) 296; (Teorema di Bézout) 296.  
 Cureton, E. E. s. M. H. Gordon 98.  
 — Edward E. (Scaling of ratings) 376.  
 — — — s. Laurence Siegel 374.  
 Curry, Haskell B. (Church-Rosser theorem) 149.  
 Dacev, A. B. (Stefansches Problem) 433.  
 Damkoehler, Guillermo (Definitheit und Reversibilität in Variationsrechnung) 79.  
 Danielson, Sture s. Johannes Malmquist 315.  
 Dantzig, D. van s. P. P. Gillis 213.  
 Darling, D. A. (Test for homogeneity) 100.  
 Darmon, G. (Loi de probabilité de Laplace-Gauss) 214.  
 Das, A. C. (Two-phase sampling) 220; (Systematic sampling) 222.  
 Davenport, H. (Geometry of numbers) 33; (Theory of numbers) 309.  
 Davies, Richard W. (Diffusion and erosion) 444.  
 Davin, Marcel (Stabilité et courbe intrinsèque) 248.



- Davis, Philip s. J. L. Walsh 53.
- Deas, Herbert D. (Diffraction of X-rays) 434.
- Deaux, R. (Quatre homographies binaires) 383.
- Deheuvelds, René (Anneau différentiel) 203; (Anneau local à filtration réelle) 204; (Invariants topologiques) 204; (Calcul des variations) 204.
- Deimel, Richard F. (Mechanics of the gyroscope) 406.
- Delachet, André et Jean Moreau (Géométrie descriptive) 405.
- Delaporte, Pierre J. (Contrôle statistique de produits industriels) 370.
- Delone, B. N. (Entwicklung der Algebra) 290.
- Demidovič, B. P. (Charakteristische Exponenten eines Systems von Differentialgleichungen) 343.
- Dempster, J. R. H. (Scattering problems) 428.
- Dénes, Peter (Vandiversche Vermutung) 310.
- Dengler, M. A., M. Goland and Y. L. Luke (Tables of  $\int_0^y (eiu - 1) \sqrt{u^2 - b^2} du/u$ ) 95.
- Denjoy, Arnaud (Énumération transfinie. I.) 35; (II, 1.) 36; (II, 2.) 37.
- Depman, I. Ja. (K. M. Peterson) 5.
- Derjugin, L. N. (Randwertproblem Wirbelströme) 422.
- Descombes, Roger et Georges Poitou (Problèmes d'approximation) 314.
- — s. Georges Poitou 314.
- Design of cylindrical concrete shell roofs 250.
- Destouches, Jean-Louis (Mécanique ondulatoire) 274; (Théories quantiques) 274.
- Destouches-Février, Paulette (Mécanique ondulatoire) 151.
- Deverall, L. I. (Trigonometric series) 48.
- Di Noi, Salvatore s. Noi, Salvatore Di 107.
- Dias, C. L. de Silva s. Silva Dias, C. L. de 200.
- Dias Agudo, Fernando Roldão (Ebene Schnitte) 108; (Satz von Kakeya) 295.
- Diaz, J. B. (Inequalities and minimal principles) 351.
- — — and M. H. Martin (Riemann's method for partial differential equations) 348.
- Dietze, Horst-Dietrich (Kubisch-flächenzentrierte Kristalle. II.) 143.
- — s. Günter Leibfried 143.
- Dieudonné, J. (Extensions quadratiques) 25; (Permanence d'espaces vectoriels topologiques) 82; (Sous-espaces linéairement compacts) 82; (Idéaux minimaux) 159; (Harmonische Analyse) 355.
- Dike, S. H. (Hallén integral equation) 423.
- Dimić, Platon (Formule d'interpolation de Lagrange) 210.
- Dinesh Chandra s. Chandra, Dinesh 199.
- Dirac, G. A. (Connectivity theorems) 404.
- Dixmier, J. (Théorème d'Harish-Chandra) 357.
- D'jakov, G. P. (Gesetz der Annäherung an die Sättigung von geraden Effekten) 286.
- Dobrušin, R. L. (Markoffsche Prozesse) 368.
- Doetsch, Gustav (Laplace-Transformation) 81; (Randwert- und Anfangswertprobleme) 81; (Laplace-Transformation) 354.
- Dolginov, A. Z. ( $\beta$ -Zerfall schwerer Kerne) 278; ( $\beta$ - $\gamma$ -Winkelkorrelation) 278; (Winkelverteilung der Konversions-elektronen) 428.
- Domb, C. (Random parameter) 261.
- Domizlaff, Hans s. Erhard Törnier 213.
- Donder, Th. De (Mécanique ondulatoire) 243.
- Doob, J. L. (Probability theory) 96.
- Dorfman, L. A. (Strömung um Profilitter) 418.
- Dorogaň, V. I. s. A. E. Glauberman 432.
- Dörr, Johannes (Zwei Integralgleichungen) 197.
- Downing, H. H. and S. J. Jasper (Homogeneous functions) 316.
- Dreben, Burton (Quantification theory) 292.
- Dubisch, Roy (Nature of number) 34.
- Dubnov, Ja. S. s. F. B. Kagan 380.
- Dubošin, G. N. (Stabilität der Bewegung) 71.
- Dubrovskij, V. M. (Majorante einer Familie von Mengenfunktionen) 319.
- Duff, G. F. D. (Differential forms in manifolds) 188.
- — — and D. C. Spencer (Harmonic tensors on Riemannian manifolds) 189.
- Duffin, R. J. and A. C. Schaeffer (Nonharmonic Fourier series) 324.
- Dugué, Daniel (Statistique et psychologie) 370.
- Dunford, Nelson (Spectral theory) 208.
- Dungen, Frans H. van den (Variant intégral) 74; (Variants intégraux) 348.
- Duparc, H. J. A. (Verschlüsselungsprobleme) 9.
- Dupouy, Gaston (Optique électronique) 271.
- Dürbaum, Hansjürgen (Bewertungstheorie) 304.
- Dutton, Arthur M. (Agricultural experiments) 225.
- Dyer, H. B. s. W. Cochran 437.
- Dyke, Milton D. van (Impulsive motion) 132.
- Dynkin, E. B. (Stetigkeit und Unstetigkeiten für Trajektorien) 368.
- Džems-Levi, G. E. (Massausche Determinanten) 211.
- Džrbašjan, M. M. (Integraldarstellung) 173.
- Džvarševili, A. G. (Approximation durch trigonometrisches Polynom) 49; (Trigonometrische Doppelreihen) 50.
- Eckel, Karl (Störungskoeffizienten) 248.
- Eckmann, Beno (Complex-analytic manifolds) 130.
- Edlund, Milton C. s. S. Glasstone 278.
- Edrei, Albert (Totally positive sequences. II.) 172.
- Edwards, Helen E. s. R. W. Smith jr. 95.
- Eecke, Paul Ver s. Léonard de Pise 145.
- Egerváry, Jenő et Viktor Lovass-Nagy (Conduction calorique) 264.
- Egorov, I. P. (Bewegungen) 119.
- Ehresmann, Charles (Variétés presques complexes) 129.
- Eichler, Martin (Idealtheorie der quadratischen Formen) 11; (Arithmetics of orthogonal groups) 11; (Quadra-

- tische Formen) und orthogonale Gruppen) 311; (Indefinite Gitter) 312.
- Eilenberg, Samuel (Homotopy groups) 241.
- Elianu, I. P. (Problème de Cauchy) 75.
- Elliott, H. Margaret s. J. L. Walsh 52.
- Emersleben, Otto  
 $\left(\sum_{k=1}^{\infty} k/(k^2 + c^2)^2\right)$  322.
- Erdélyi, I. L. (Planck's constant) 427.
- Errera, Alfred (Polyèdres de genre zéro) 404.
- Ertel, Hans (Hydrodynamische Gleichungen) 131.
- Ergun, N. P. (Nicht-lineare Systeme von Differentialgleichungen) 341.
- Est, W. T. van ((CA) Lie algebras. I. II.) 302; (Dense imbedding of Lie groups. II. (I.) II. (II.)) 302.
- — — and J. Th. G. Overbeek (Electrokinetic effects. I. II.) 282.
- Estermann, T. (Prime number theory) 31.
- Eulerus, L. (Opera. XXIV. XXV.) 195.
- Evgrafov, M. A. (Verhalten einer Potenzreihe auf dem Rande) 54.
- Eyraud, Henri (Ensembles agrégatifs adjoints) 35; (Transfiscalité) 105.
- Faddeev, D. K. (Homologie-theorie in Gruppen) 299.
- Fage, M. K. (Parabolische Basis von V. Ja. Kozlov) 201.
- Fantappiè, Luigi (Grandezze della meccanica quantica) 427.
- Farah, Edison (Menge der Mächtigkeiten der Teilmen-gen) 34.
- Fauville, A. s. P. P. Gillis 213.
- Fazekas, Ferenc (Résistance de mise à terre) 266.
- Feather, N. (Nuclear stability rules) 140.
- Fedorov, V. S. (Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen) 170.
- Féjér, Lipót (Approximation) 46.
- Fejes Tóth, László (Dichteste Kugellagerung) 396.
- Fell, J. M. G. and J. L. Kelley (Unbounded operators) 207.
- Feller, W. (Semigroups of transformations) 90; (Diffusion) 369.
- Fenyő, István (Équations différentielles) 189; (Équations intégrales singulières) 198.
- Féret, J. Kampé de s. Kampé de Féret, J. 199.
- Fernandes, A. De Mira s. Mira Fernandes, A. De 55, 64, 113.
- Fernandez, Carlos Graef s. Graef Fernandez, Carlos 273.
- Féron, R. et C. Fourgeaud (Rapport de deux variables aléatoires) 364; (Loi de Laplace-Gauss) 364.
- Robert s. Claude Fourgeaud 373.
- Ferrari, Carlo (Corrente ipersonica linearizzata) 258.
- Fichera, Gaetano (Analisi matematica contemporanea) 290.
- Fichtengol'ts, G. M. (Transformation der Veränderlichen) 167.
- Fieschi, R. s. P. Caldirola 142.
- Fil'čakov, P. F. (Zweispuntige Wehrsohle) 260.
- Finetti, Bruno de (Eventi equivalenti) 97; („Distribution d'opinions“) 369.
- Finney, D. J. (Logistic response curve) 225.
- Finzi, Leo (Strutture reticolari elastoplastiche) 256.
- Fischer, Inga (Molecular theory) 431.
- Wilhelm (Zetafunktion) 306.
- Fishel, B. (Eigenfunction expansions) 350.
- Fitch, Frederic Brenton (Symbolic logic) 5.
- Fleckenstein, J. O. (Problem der sphärischen Astronomie) 4.
- Floyd, E. E. (Related periodic maps) 399.
- Følner, Erling (Theorems of Pontrjagin) 201.
- s. Harald Bohr 1.
- Föppl, O. (Schwingungsbewegung) 407.
- Fornaguera, R. Ortiz s. Ortiz Fornaguera, R. 390.
- Fort jr., M. K. (Continuous functions) 338.
- Fourès, Léonce (Translations isothermes) 178.
- Fourès-Bruhat, Y. (Systèmes d'équations aux dérivées partielles) 192.
- Fourgeaud, C. s. R. Féron 364.
- Claude et Robert Féron (Variations saisonnières) 373.
- Fox, R. H. (Knot theory) 130; (Fenchel's conjecture about  $F$ -groups) 154.
- Francken, J. C. s. P. Schagen 425.
- Fréchet, M. s. P. P. Gillis 213.
- , Maurice (a priori-Problem) 363; (Valeurs typiques d'un nombre aléatoire) 363.
- French, John W. (Criterion-keying and selecting test items) 374.
- Frenkel', Ja. I. 146.
- — — ( $\gamma$ -Spektren der schweren Kerne) 278; (Dielektrika vor dem Durchschlag) 439.
- Freud, Géza (Distribution des mélanges gazeux) 259; (Champ magnétique) 267; (Énergie cinétique de modèle d'atome) 280.
- s. Mátyás Arató 280.
- Freudenthal, Hans (Intégrateurs) 93; (Servo-statistische Betrachtung) 94; (Denken von Einstein) 242.
- Freund, John E. (Statistics) 369.
- Frey, Tamás (Planimètres) 361.
- Fridlender, V. R. s. G. S. Salechov 191.
- Friedrichs, K. O. (Quantum theory of fields) 274.
- Frink, Orrin (Maximal chain theorem) 165.
- Frisch, O. R. (edited by) (Nuclear physics. II.) 277.
- Fritz, N. L. (Analog computers) 94.
- Fröberg, Carl-Erik (Hexadecimal conversion tables) 95.
- Froda, Alexandru (Mouvements réalisables du point matériel) 244.
- Fröhlich, A. (Class group of Abelian fields) 161.
- Fröman, Per Olof (Neutron diffraction. II.) 285; (Scattering of neutrons) 285.
- — — s. I. Waller 286.
- Fubini, S. s. E. R. Caianiello 274.
- Fuchs, L. (Radical) 20; (Cyclic groups) 155; (Abelian groups) 300.
- Führer, Irmgard (Jahresschwankung unseres Zeitnormals) 377.
- Fujiwara, Shigeru s. Usa Sasaki 17.
- Fukamiya, Masanori (Theorem of Gelfand and Neumark) 86.
- Fukuda, Yoshiichi (Lattice vibrations) 144.

- Fulton, C. M. (Weierstrass tensors) 113.
- Fumi, Fausto G. (Direct-inspection method) 437; (Physical properties of crystals) 437.
- Fusa, Carmelo (Disuguaglianza di Noether) 389.
- G. Allen, D. N. de s. Allen, D. N. de G. 264.
- Gabillard, Robert (Résonance paramagnétique nucléaire) 280.
- Gachov, F. D. (Riemannisches Randwertproblem) 57.
- Gaeta, Federico (Rigate doppie) 228.
- Gagaev, B. M. (Eigenwerte von Integralgleichungen) 353.
- Gagua, M. (Beste Approximation) 76.
- Galafassi, Vittorio Emanuele (Limitazione di Harnack) 111; (Base reale) 111.
- Gale, David (Indeterminate problem in classical mechanics) 245.
- Gallissot, François (Indéterminations dues aux liaisons) 244; (Dynamique des solides) 244; (Sur une méthode universelle de formation des équations du mouvement des systèmes matériels) 244; (Équations différentielles de la mécanique) 406.
- Gamba, A., R. Malvano and L. A. Radicati (Nuclear reactions) 140.
- Ganapathy Iyer, V. (Space of integral functions. III.) 83.
- Ganea, Tudor (Covering spaces) 398; (Multikohärenz topologischer Gruppen) 398.
- Gans, Ricardo (Maxwellsche Spannungen) 422.
- Garabedian, P. R. (Riemann mapping theorem) 175.
- and D. C. Spencer (Complex boundary value problems) 181.
- García, Godofredo (Allgemeine Relativitätstheorie) 272.
- Pradillo, Julio (Produkt-integrale) 319.
- Garibjan, G. M. (Bremsstrahlung) 428.
- Garnir, H. G. (Fonctions de Green de l'opérateur méta-harmonique) 193; (Opérateur elliptique) 193; (Propagation de l'onde) 194.
- Garrrick, I. E. (Conformal mapping in aerodynamics) 334.
- Garwick, Jan V. (Integral equations) 92.
- Gáti, József (Trigonométrie sphérique) 405.
- Gayen, A. K. (Hyperbolic sine transformation) 97.
- Geach, P. T. and G. H. von Wright (Extended logic of relations) 149.
- Gebelein, Hans (Streuungsstufe) 377.
- Gehér, István (Transformation d'intégrale) 41.
- Gehler, Willy und Wolfgang Herberg (Festigkeitslehre. I.) 408.
- Geiringer von Mises, Hilda (Teoria matematica della plasticità) 412.
- Gelf'and, I. M. und M. I. Graev (Unitäre Darstellungen Liescher Gruppen) 358.
- und M. A. Najmark (Unitäre Darstellungen) 358.
- und Z. Ja. Šapiro (Drehungen des dreidimensionalen Raumes) 157.
- Gelf'ond, A. O. (Lineare Differentialgleichungen unendlicher Ordnung) 342.
- Gercenštejn, M. E. (Streuung von Radiowellen) 270; (Schwingungen in einer Gasentladung) 281.
- Gericke, H. (Aristotelische Syllogismen) 146; (Vermutung von Minkowski) 312.
- Geronimus, Ja. L. (Extremalprobleme im Raume  $L_0^{(p)}$ ) 85; (Orthogonale Polynome) 323; (Koriphaen der Mechanik) 406.
- Gething, P. J. D. (Rotation and magnetism) 273.
- Gheorghiev, Gh. (Théorème de Réaumur) 114.
- Gheorghiu, Gh. Th. (Classe des surfaces. II.) 116.
- Octavian Em. (Pseudolineares geometrisches Objekt) 390.
- Ghermanescu, Michel (Fonctions trigonométriques) 325.
- Ghika, Al. (Topologies définies sur un  $A$ -module) 83.
- Ghosh, M. N. (Wald's decision theory) 100.
- N. L. (Spheroidal and anchoring configurations) 444.
- Gibbs, W. J. (Tensors) 267.
- Gibson, W. A. (Orthogonal and oblique simple structures) 375.
- Gichman, I. I. (Satz von N. N. Bogoljubov) 345.
- Gil Pelaez, J. (Absolutfunktionen) 225.
- Gilbarg, David (Axially symmetric flows) 416.
- Gillis, P. P., R. von Mises, R. Ballieu, D. van Dantzig, R. Coutrez, L. Bouckaert, I. Prigogine, F. Campus, A. Fauville, M. Fréchet et G. Hirsch (Probabilités) 213.
- Gini, Corrado (Dispersione e connessione a serie) 105; (Symbols in statistics) 370.
- Ginzburg, V. L. (Anisotropie) 440; (Supraleitende Häutchen im Magnetfelde) 441.
- Girlich, Albert A. (Test pulse generator) 94.
- Giuliano, Landolino (Equilibrio di una piastra) 253.
- Glastone, Samuel and Milton C. Edlund (Nuclear reactor theory) 278.
- Glauber, A. E. (Energieaustausch. I.) 143.
- und V. I. Dorogan' (Energieaustausch. II.) 432.
- Glazman, I. M. (Spektrum singulärer Randwertaufgaben) 89.
- Gleason, Andrew M. (Groups) 301.
- Gloden, A. (Factorisation des nombres  $N^4 + 1$ ) 28; (Analyse diophantienne) 311.
- Gnedenko, B. V. (Stabile Grenzverteilungen) 215; (Michail Vasiljevič Ostrogradskij) 290.
- Godeaux, Lucien (Surface algébrique) 112.
- Gödel, Kurt (Rotating universes) 272.
- Godement, Roger (Group representations) 86; (Spherical functions. I.) 201; (Une généralisation du théorème de la moyenne pour les fonctions harmoniques) 303.
- Goffman, Casper (Riemann integral) 319.
- Gotab, S. (Ombilicité d'un point) 390.
- Goland, M. s. M. A. Dengler 95.
- Gol'cman, V. K. und P. I. Kuznecov (Differentialgleichungen und numerische Methoden) 183.
- Gol'dberg, Z. A. s. I. G. Šapošnikov 257.
- Goldstein, S. (Gas dynamics) 136.
- Goluzin, G. M. (Geometrische Theorie der Funktionen) 59; (Untergeordnete schlichte Funktionen) 332.



- Gombás, P. (Nucleonen im Kern) 141.
- Gomes, R. L. (Lebesgue-Stieltjes-Integral. I.) 166.
- Gonçalves, J. Vicente (Groups) 12; (Fractions continues réelles) 46.
- Good, I. J. (Dirichlet's multiple integral) 320.
- Goode, H. P. s. A. H. Bowker 98.
- Goodell, John D. (Computing machinery) 361.
- Goodman, Nelson (Simplicity) 7.
- Gorëinskij, Ju. N. (Gruppen mit endlicher Anzahl von Klassen konjugierter Elemente) 13; (Periodische Gruppen) 299.
- Gordeev, G. V. (Plasma im Magnetfeld) 281.
- Gordon, M. H., E. H. Loveland and E. E. Cureton (Table of chi-square) 98.
- Gorgidze, A. Ja. (Dehnung und Biegung von Balken) 408.
- Górski, J. (Problème de F. Leja) 77.
- Gotô, Morikuni s. Shingo Murakami 302.
- Gotusso, Guido (Correnti a velocità sonica) 258; (Equazioni dei fluidi) 418.
- Goulden, C. H. (Statistical analysis) 219.
- Grabaf, M. I. (Abbildung dynamischer Systeme) 340.
- Gracheva, E. G. (Results of chemical analysis) 370.
- Graef Fernandez, Carlos (Birkhoff'sche Gravitationstheorie) 273.
- Graev, M. I. s. I. M. Gel'fand 358.
- Graffi, Dario (Oscillazioni forzate) 185; (Oscillazioni nei sistemi non-lineari) 188.
- Graham, E. W. s. E. F. Beckenbach 175.
- Grandori, Giuseppe (Strutture reticolari) 256.
- Grant, Hiram E. (Descriptive geometry) 405.
- Graser, Wolfram (Konforme Differentialgeometrie einparametriger Kugelscharen) 392.
- Greco, Donato (Omomorfismi dei sottogruppi normali) 153; (Funzioni in  $n$  variabili) 167.
- Green, Bert F. (Oblique structure in factor analysis) 376. — H. S. and H. Messel (Cosmic radiation) 279.
- Green, John W. ( $\alpha$ -potentials) 77.
- Grenander, Ulf (Empirical spectral analysis) 223; (Toeplitz forms) 223.
- Grew, K. E. and T. L. Ibbs (Thermal diffusion) 265.
- Gröbner, W. (Mathematische Physik) 243; (Idéaux et géométrie algébrique) 384. — Wolfgang (Geschlecht einer Mannigfaltigkeit) 385.
- Groenewold, H. J. (Quantum measurements) 243.
- Groenewout, H. W. F. van't s. J. P. Schouten 269.
- Grosh, N. L. (Flow problem for viscous incompressible fluid) 417; (Transition from viscous to perfect fluid flow) 417.
- Grosjean, C. C. (Diffraction of light) 271.
- Grove, V. G. (Verallgemeinerte Krümmungen) 114.
- Grunsky, H. (Tschebyscheffsche Probleme) 57.
- Guggenheimer, Heinrich (Differentialalgebren) 189; (Vierdimensionale Einsteinräume) 393; (Variétés symplectiques) 402.
- Guinand, A. P. (Logarithmic derivative of the gamma function) 326.
- Gullstrand, Tore R. (Flow over symmetrical aerofoils) 134; (Transonic flow over symmetrical aerofoils) 134; (Flow over aerofoils) 135.
- Gulmanelli, P. s. P. Caldirola 142.
- Gumbel, E. J. (Intervalles de contrôle) 365.
- Gupta, N. N. (Low angle scattering of X-rays) 434.
- Gurevič, A. V. (Ausgedehnte Teilchen) 265. — G. B. (Trivektor) 113; (Algebra eines Systems von Polyvektoren) 113; (Einbettung eines Systems von Polyvektoren) 113. — — s. F. B. Kagan 380.
- Gussov, V. V. (Gammafunktion) 50.
- Guttman, Louis (Common-factor analysis) 375.
- Gyarmathi, László (Metrische Aufgaben) 130.
- Gyires, Béla (Summenverteilungen) 365.
- Haack, Wolfgang (Randwertprobleme. II.) 190.
- Haag, Jules (Mouvement vibratoires. I.) 407.
- Haar, D. ter (Molecular sum rule) 280.
- Habsch, Hans (Darstellung Riemannscher Flächen) 337.
- Hadamard, Jacques (Cauchy's problem) 348.
- Hadwiger, H. (Funktionale  $k$ -dimensionaler Eikörper. I.) 122; (Distanzmittel bei konvexen Körpern) 396.
- Haefeli, Hans Georg (Funzioni lineari delle funzioni analitiche) 64.
- Hagstroem, K. G. (Capitalizzazione) 106.
- Haimovici, Adolf (Mécanique du point de masse variable) 246. — Mendel (Équations aux dérivées partielles) 73.
- Haldane, J. B. S. (Estimates of a parameter) 223.
- Halmos, Paul R. (Spectra) 90.
- Hamada, Tetsuo and Masao Sugawara (Decays of  $\pi$ -mesons and  $V$ -particles) 139.
- Hamaker, H. C. (Industrial sampling problems) 370.
- Hampel, R. (Noyaux itérés) 199; (Équations intégrales dans électricité) 266.
- Hanneken, Clemens Bernard (Congruences) 296.
- Harary, Frank s. Ian G. Ross 378.
- Harish-Chandra (Plancherel formula) 157.
- Hartman, Philip (Linear differential equations) 347.
- Hartree, D. R. (Numerical analysis) 359.
- Hasenjaeger, Gisbert (Semantik und Syntax) 6.
- Hasse, H. (Primzerlegung in galoisschen Zahlkörpern) 27.
- Hauptmann, H. and J. Karle (Crystal-structure determination) 437.
- Hayashi, Chikio (Prediction of phenomena) 99.
- Heegner, Kurt (Diophantische Analysis) 162.
- Heijendoort, Johan van (Locally convex manifolds) 122.
- Heisenberg, W. (Laminar flow) 259.
- Helson, Henry (Ideal structure) 356; (Spectral synthesis) 356.
- Hemer, Ove (Diophantine equation) 310.

- Henry, Louis (Descendance d'un élément de population) 377.
- Henze, Ernst (Lösung linearer Eigenwertprobleme mittels Störungsrechnung) 353.
- Herberg, Wolfgang s. Willy Gehler 408.
- Hermann, C. (Translationsgruppen) 283.
- Herrera, Felix E. (Differentiation reeller Ordnung) 42.
- Herriot, John G. (Polarization of a lens) 422.
- Herrmann, Horst (Liniengeometrie des  $P_3$ ) 108.
- Hersch, Joseph (Longueurs extrémales) 332.
- et Albert Pfluger (Généralisation du lemme de Schwarz) 63.
- Hervé, Michel (Fonctions fuchsienues) 66.
- Hewlett, P. S. s. R. L. Plackett 104.
- Hildebrand, F. B. (Applied mathematics) 91.
- Hill, George W. (Radiant universe) 288.
- Hille, Einar (Cauchy's problem) 90.
- Hilton, P. J. (Hopf invariant) 402.
- W. F. (Aerodynamics) 418.
- Hirsch, G. s. P. P. Gillis 213.
- Guy (Invariants attachés aux sections dans les espaces fibrés) 400.
- C. (Homology invariants) 125.
- P. B. (X-rays in absorbing crystals) 435.
- Hirschman jr., I. I. (Heat equation) 262.
- Hitotumatu, Sin (Multiple power series) 43.
- Hjelte, Fritz (Velocity distribution on thin conical bodies) 134.
- Hochschild, G. (Automorphism group) 302.
- Hodge, W. V. D. (Tangent sphere-bundles) 385.
- jr., P. G. (Brownian motion) 262.
- Hoggatt, Vern (Maximum area) 78.
- Hölder, E. (Drehfrequenzbereiche) 414.
- Holyoke, T. C. (Permutation groups) 155.
- Honda, Kin-ya (Finite groups) 300.
- Hönig, Chaim Samuel (Verfeinerung von Topologien) 397.
- Hopf, Eberhard (Functional calculus) 417.
- H. (Anwendungen der Topologie auf Algebra) 306.
- Heinz ( $n$ -dimensionale Sphären) 403.
- Hosemann, R. und S. N. Bagchi (Röntgenstrukturanalyse durch Entfaltung. I.) 435; (Interference theory) 435.
- Hosszú, Niklós (Équation fonctionnelle de la bisymétrie) 210.
- Hove, Léon van (Topologie des espaces fonctionnels) 339.
- Hsiang, Fu Cheng (Integro-jump of a function) 49.
- Hu, Sze-tsen (Cohomology theory. III.) 239; (Finite-dimensional groups) 302.
- Hua, Loo Keng (Projective geometry on a line) 10.
- Huber, Alfred (Wachstums-eigenschaften) 59.
- Huff, William N. and Earl D. Rainville (Sheffer  $A$ -type of polynomials) 325.
- Hume-Rothery, William (Atomic theory) 144.
- Huntley, H. E. (Dimensional analysis) 405.
- Hurewicz, W. (Homotopy and homology) 241.
- Hurst, C. A. (Feynman-Dyson technique) 275.
- Huszár, Géza (Interpolation) 322.
- Hutcherson, W. R. (Invariant curves) 111.
- Hwang, Keh-Chih (Thin plates) 251.
- Hyslop, J. M. (Strong summability of series) 321.
- s. A. V. Boyd 321.
- Jacob, Caius (Mechanik der Flüssigkeiten) 414.
- Iacovache, Maria (Fonctions monogènes au sens de Feodorov) 338.
- Ibbs, T. L. s. K. E. Grew 265.
- Ide, Saburo (Kawaguchi space) 236.
- Igusa, Jun-ichi (Algebraic variety) 385; (Picard varieties) 386; (Varieties of classical groups) 387.
- Imamura, Tsutomu s. Ryôyû Utiyama 275.
- Inaba, Mituo (Fixed points) 89.
- Inagaki, Takeshi (Topologie. I.) 123; — and Masahiro Sugawara (Compactification) 239.
- Inan, Mustafa (Elastic stability of a cylindrical strip) 248.
- Inönü, E. and E. P. Wigner (Galilei group) 138.
- Ionescu-Cazimir, Viorica (Équations de l'équilibre thermoélastique. IV.) 255; (Équations de l'équilibre thermoélastique plan) 411.
- Ionescu Tulcea, C. T. (Intégration des fonctions d'ensemble) 318.
- Isaacs, Rufus (Monodiffrie functions) 180.
- Iseki, Kanesiroo (Transformation formula) 311.
- Iséki, Kiyoshi (Integers) 152; (Brown-McCoy radical in topological rings) 305; ( $G$ -radical) 305.
- Isida, Masatugu, D. (Linear regression estimate) 102.
- Iswata, Takesi (Topological groups) 304.
- Iske, James E. (Electrical networks) 268.
- Išlinskij, A. Ju. (Restspannungen bei Torsion) 412.
- Itô, Kiyosi (Wiener integral) 86.
- Itô, Noboru ( $\pi$ -structures) 156.
- Itô, Seizo (Linear groups) 359.
- Iwahori, Nagayoshi (Non-presentability of linear groups in Lorentz groups) 301.
- Iwasawa, Kenkichi ( $(L)$ -groups) 16.
- and Tsuneo Tamagawa (Group of automorphisms) 308.
- Kenkiti and Tsuneo Tamagawa (Group of automorphisms) 307.
- Iwata, Giiti (Orthogonal functions) 330.
- Iyer, P. V. Krishna (Difference equation in distribution problems) 215.
- — — and Daroga Singh (Distance in sampling) 372.
- V. Ganapathy s. Ganapathy Iyer, V. 83.
- Izaki, Mamoru (Convergence of integral) 368.
- Izumi, Yoshisa (Perfection) 6.
- Jacobson, N. (Jordan rings) 20.
- Jaffard, P. (Anneaux du type de Dedekind) 22.
- Jaglom, A. M. (Stationäre Zufallsfunktionen) 366.
- I. M. (Symplektischer Raum) 109.

- Jagn, Ju. I. (Biegungs-Torsionsdeformationen) 249.
- Jagodzinski, H. (Fehlordnung in Kristallen) 283.
- Jakóbczyk, Franciszek (Funktion  $\lambda_g(n)$ ) 30.
- Jakowlew, K. P. (Auswertung von Meßergebnissen) 103.
- Jappa, Ju. A. (Regularisierung) 140.
- Jasper, S. J. s. H. H. Downing 316.
- Jaumotte, André (Formule de Kutta et Joukowski) 131.
- Jecklin, Heinrich (Interpolazione iperbolica) 105.
- Jessen, Borge s. Harald Bohr 1.
- Johnson, N. L. (Probability integral) 96.
- R. E. (Abstract algebra) 20.
- Jones, D. S. (Behaviour of intensity due to surface distribution of charge) 352.
- Jónsson, Bjarni and Alfred Tarski (Boolean algebras with operators) 158.
- Jordan, P. (Erhaltungssätze der Physik. II.) 139; (Wirkungsquantum und Elementarlänge) 427.
- Jouguet, Marc (Électricité théorique. I.) 422.
- Juan, Ricardo San s. San Juan, Ricardo 56, 324.
- Juan Llosá, Ricardo San s. San Juan Llosá, Ricardo 55.
- Jucis, A. P. (Fock'sche Gleichungen) 281; (Unvollständige Trennung der Variablen) 429.
- Jurek, Bohumil (Aplanatic singlet) 271.
- Juvancz, Iréneusz et Tamás Lipták (Application médico-biologique) 225.
- Kaarsemaker, L. and A. van Wijngaarden (Rank correlation) 95.
- Kagan, F. B. (Grundlagen der Geometrie. I.) 380.
- Kajlis-Borok, V. I. (Frequenzen eines elastischen Mediums) 257.
- Kakutani, Shizuo (Ergodic theory) 86.
- Kalandija, A. I. (Verbiegung einer elastischen Membran) 252; (Verbiegung einer elastischen Platte) 252.
- Kalicki, Jan (Truth-tables) 147.
- Kamath, V. B. s. D. K. Sen 407.
- Kamefuchi, Susumu and Hiroshi Umezawa (Quantum electrodynamics) 139; (Interactions of elementary particles. III.) 276.
- s. H. Umezawa 275.
- Kampé de Fériet, J. (Harmonic analysis) 199.
- Kandô, Tetsuo (Arbitrary rings) 304.
- Kanellos, S. G. (Conditional distribution) 364.
- Kanô, Seigo (Prediction problem) 368.
- Kaplan, Samuel (Cartesian products) 354.
- Kar, K. C. (Statistical mechanics. I. II.) 261.
- Karapandjitch, Djordje (Équations linéaires aux dérivées partielles) 349.
- Karhunen, K. (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 95.
- Karle, J. s. H. Hauptmann 437.
- Karpman, V. I. (Regularisierung) 140.
- Kashiwagi, Sadao s. Shigeo Ozaki 337, 338, 339.
- Kasner, Edward and John de Cicco (Newtonian potential of a sphere) 77; (Potential theory. I.) 195.
- Katsurada, Yoshie (Parallel displacement of arc) 120; (Space of higher order. II.) 121.
- s. Akitsugu Kawaguchi 394.
- Kawaguchi, Akitsugu (Space with connection belonging to a Lie group) 121.
- and Yoshi Katsurada (Connection in an areal space) 394.
- and Kwoichi Tandai (Areal spaces. V.) 236.
- Masaaki and Nobumichi Mugibayashi (Gauge invariance) 275.
- Kazami, Akiko (Stationary Markoff process) 102.
- Každan, Z. N. (Reihen nach Funktionen der Form  $\varphi(nx)$ ) 325.
- Kelley, J. L. (Operator algebras) 207.
- s. J. M. G. Fell 207.
- Kemphorne, Oscar (Analysis of experiments) 99.
- Kendall, David G. (Croissance en biologie) 104.
- M. G. (Regression. II.) 225.
- Kendrew, J. C. s. J. M. Bennett 361.
- Kerimov, M. K. (Extremum bei unstetigen Variationsproblemen) 78.
- Kertész, A. (Abelian  $p$ -groups) 155.
- Kesava Menon, P. (Gauss's sums) 313.
- Keune, Friedrich (Low aspect ratio wings in subsonic and supersonic flow) 133.
- Kiefer, J. and J. Wolfowitz (Stochastic estimation) 366.
- Kiessler, Fritz (Nomographie. I. II.) 93.
- Kihara, Taro (Electrical discharges in gases) 432.
- Kimball, W. S. (Calculus of variations) 78.
- King, A. J. s. D. S. Robson 221.
- Edgard P. (Operating characteristic) 101.
- Kinohara, Akira (Derivations in algebraic number fields) 307.
- Kitagawa, Tosio (Stochastic translatable functional equations) 217.
- Kleene, S. C. (Recursive functions) 150.
- Klein, G. (Random-walk problem) 262; (Brownian motion) 262.
- Micha (Polyedromodular quotient of 5-th order) 301.
- Klepikov, N. P. s. A. A. Sokolov 428.
- Klimontovič, Ju. L. (Quantenfunktion einer Verteilung) 421.
- — und V. P. Silin (Spektren) 287; (Anregungsspektren) 439.
- Kloosterman, H. D. (Binary modular congruence groups) 15.
- Kloot, N. H. s. E. J. Williams 372.
- Knaster, B. (Compactification) 124.
- Kneebone, G. T. (Mathematical formalisms) 9.
- Knopp, Konrad (Folgenräume und Limitierungsverfahren) 321.
- Knothe, Herbert (Konvexe Körper) 123.
- Kobelev, L. Ja. s. S. V. Vonskij 439.
- Kober, H. (Conformal representations) 335.
- Kochendörfer, Rudolf (Erweiterungen von Gruppen) 25.
- Kodaira, Kunihiko (Arithmetic genera) 385.
- Köhler, Hilding (Condensation in the atmosphere) 444.
- Kolbina, L. I. (Schlichte Funktionen) 60.



- Kolmogorov, A. N. (Bedingte mathematische Erwartungen) 216.
- Komar, N. P. (Mathematical statistics in analytical chemistry) 370.
- Komatu, Yūsaku (Functions harmonic) 352.
- and Akira Mori (Riemann surfaces) 63.
- Komm, H. s. L. S. Pontryagin 399.
- Koop, J. C. (Bias of the ratio estimate) 222.
- Kopeć, J. (Almost periodic functions) 67.
- Kopineck, Hermann-Josef (Quantentheorie des  $N_2$ -Moleküls. I.) 430; (Zweizentrenwechselwirkungsintegrale. III.) 430.
- Koppel, Herbert (Digital computer) 94.
- Korn, G. A. and T. M. Korn (Electronic analog computers) 93.
- T. M. s. G. A. Korn 93.
- Kosambi, D. D. (Path geometry) 237.
- Koschmieder, Lothar (Gegenbauersche Polynome) 51; (Integrale. II.) 51.
- Koseki, Ken'iti (Abbildungen von einfach-zusammenhängenden Gebieten I.) 403.
- Kosmodemjanskij, A. A. s. I. V. Meščerskij 426.
- Kosten, L. (Measurements of probabilities of delay. I. II.) 374.
- Koteljanskij, D. M. (Matrizen mit positiven Elementen) 152.
- Kothari, L. S. and P. L. Bhatnagar (Riesz potential) 349.
- Kovancov, N. I. (Flächenklasse) 392.
- Kraitchik, M. (Théorie des nombres) 29.
- Kramers, H. A. (Reflections on phonons and rotons) 282.
- Krasner, Marc (Théorie locales des corps des classes) 27.
- Krasnosel'skij, M. A. (Erweiterungen Hermitescher Operatoren) 207.
- Kreisel, G. (Some inequalities) 170.
- Krejn, M. G. (Hermitesche Operatoren) 202; (Hermiteisch-positive Kerne. I.) 202; (Untersuchungen von Stieltjes) 347.
- Krikunov, Ju. M. (Riemannsches Randwertproblem) 333.
- Krilov, A. N. (Differentialgleichungen) 340.
- Krishna Iyer, P. V. s. Iyer, P. V. Krishna 215, 372.
- Kristensen, P. and C. Møller (Convergent meson theory. I.) 277.
- Krull, Wolfgang (Jacobson-sches Radikal) 304.
- Krzyżański, M. (Équations aux dérivées partielles dans domaine non borné) 75.
- Kubiljus, I. P. (Geometrie der Primzahlen) 33.
- — — und Ju. V. Linnik (Zerlegung des Produktes von drei Zahlen) 314.
- Kudo, Tatsuji (Fibre bundles) 241.
- Kulikov, L. Ja. (Direkte Zerlegungen von Gruppen) 298.
- N. K. (Nichtlineare Differentialgleichung) 69.
- Künzi, Hans P. (Surfaces de Riemann à extrémités bi-périodiques) 179; (Surfaces de Riemann avec un nombre fini d'extrémités périodiques) 179.
- Kuratowski, Casimir (Topologie. I. II.) 397.
- Kurth, Rudolf (Dichte in Kugelsternhaufen) 442; (Schwarzchildsche Integralgleichung) 442.
- Kushwaha, R. S. (Pulsations of a model of variable star) 443.
- — — and P. L. Bhatnagar (Stars under variable  $I'$ ) 443.
- Kusunoki, Yukio (Riemannsche Fläche) 178.
- Kuzmak, G. E. (Integrodifferentialgleichung eines Flügels) 418.
- Kuznecov, P. I. s. V. K. Gol'man 183.
- Kwal, Bernard (Rayonnement électromagnétique) 281.
- Laasonen, P. (Wärmeleitungsproblem) 262.
- Lahiri, D. B. (Method of sample selection) 222.
- Lalan, V. (Applications géométriques de la différentiation extérieure) 390.
- Lammel, Ernesto s. N. Estela F. de Battig 43.
- Lang, Serge (Hilbert's Nullstellensatz) 304.
- Langebartel, Ray G. (Convolution of the kernel  $x^2 - t^2$ ) 81.
- Langendonck, Telemaco van (Elastizitätstheorie. I.) 408.
- Laporte, O. s. R. C. F. Bartels 335.
- Laptev, B. L. (Lobačevskij) 290.
- Larmor, J. s. H. Poincaré 291.
- Larnaudie, Marcel (Molécules polyatomiques) 281.
- Latyševa, K. Ja. (Differentialgleichungen in endlicher Form) 184; (Normalreihen als Lösungen von Differentialgleichungen) 342.
- Laue, M. v. (Röntgenstrahl-Interferenzen in Kristallen) 433; (Raumgitterinterferenzen von Materiewellen) 434; (Supraleitung. I. II.) 440; (Thermodynamik und Supraleitung) 440.
- Lavine, Louis R. (Corrections to Grison's paper) 438.
- Leavitt, W. G. (Mappings of vector spaces) 294.
- Leibfried, Günther und Horst-Dietrich Dietze (Kubisch-flächenzentrierte Kristalle. I.) 143.
- Leja, F. (Fonctions analytiques extrémales) 172.
- Lejbenzon, Z. L. (Trennung konvexer Mengen durch eine Hyperebene in linearen topologischen Räumen) 82.
- Lekkerkerker, C. G. (Darstellung natürlicher Zahlen) 31.
- Lelong, Pierre (Domaines convexes) 181.
- Lelong-Ferrand, Jacqueline (Représentation conforme des bandes) 61.
- Lemaître, G. (Problème des trois corps) 247.
- Lennard-Jones, Sir John and J. A. Pople (Spatial correlation of electrons in atoms and molecules. I.) 143.
- Lenz, Hanfried (Orthogonal-trajektorien) 232.
- Léonard de Pise (Nombres carrés) 145.
- Leont'ev, A. F. (Satz von Liouville) 173; (System analytischer Funktionen) 330.
- LePage, Wilbur R. and Samuel Seely (Network Analysis) 268.
- Leray, Jean (Points fixes) 88.
- Lesky, Peter (Stati di tensione in cilindro elastico) 248.
- Leslie, P. H. (Population parameters. II.) 104.
- Levi, Beppo s. Antonio Petracca 54.
- Cività, Tullio (Problème des  $n$  corps en relativité) 426.

- Levin, B. Ja. (Fastperiodische Funktionen) 182.
- Levine, S. and A. Suddaby (Two parallel plates in a 1—2 electrolyte) 282.
- Levitan, B. M. (Quadrates von Eigenfunktionen) 187.
- Lévy, Jacques s. Henri Poincaré 441.
- Paul (Intégrales de Stieltjes) 41; (Processus stationnaires et markoviens) 97.
- Lewis, H. W. (Nonrelativistic charged particle) 261.
- Lewy, Hans (Analytic boundary conditions) 62; (Confluence of boundary conditions) 333.
- Liao, S. D. (Periodic transformations) 399.
- Liber, A. E. (Flächentheorie) 232.
- Libermann, Paulette (Structures presque quaternioniennes) 394.
- Libois, Paul (Notions de nombre et de tenseur) 389.
- Lichnerowicz, A. (Courbure, nombres de Betti) 118; (Gravitation) 272.
- Lidiard, A. B. (Spin degeneracy) 144.
- Lighthill, M. J. (Sound generated aerodynamically. I.) 259.
- Linnaluoto, V. V. (Numerical integration method) 135.
- Linnik, Ju. V. (Goldbachsches Problem) 31; (Primzahlen und Potenzen von Zwei) 314. — — — s. I. P. Kubiljus 314.
- Linsky, Leonard (edited by) (Semantics and the philosophy of language) 292.
- Lipson, H. s. C. A. Beavers 436.
- Lipták, Tamás s. I. Juvancz 225.
- Lisowski, A. (Stabilität von Rotationsschalen) 411.
- Litwiniszyn, J. (Equations of hydrodynamics) 132.
- Livingston, M. Stanley s. Ernest D. Courant 142.
- Ljance, V. E. (Cauchysches Problem) 348.
- Löbell, Frank (Integrabilitätsbedingungen) 391; (Variation von Kurvenintegralen) 391; (Integrabilitätsbedingung für Ortsfunktionen) 391.
- Lochs, Gustav (Gitterpunkte im Tetraeder) 313.
- Lode, Tenny (Universal decision element) 362.
- Logunov, A. A. s. Ja. P. Terleckij 280.
- Lohwater, A. J. and G. Piranian (Conformal mapping of Jordan region) 177.
- Loinger, A. (Modello di due campi interagenti) 275.
- Lokki, Olli (Randwertproblem analytischer Funktionen) 57.
- London, F. (Bemerkungen zur Theorie der Supraleitung von M. von Laue) 440.
- Loopstra, B. J. (Rechenstromkreise) 94.
- Lošić, A. M. (Riemannsche Räume erster Klasse) 117.
- Lord, Frederic M. (Reliability of multiple-choice tests) 375; (Multiple classification) 379.
- Lordkipanidze, R. S. (Schwingungen eines Balkens) 257.
- Lovass-Nagy, Viktor (Flexion d'une plaque) 253; (Déformation des plaques minces) 253; (Tension plastiques et élastiques) 256. — — — s. Jenő Egerváry 264.
- Loveland, E. H. s. M. H. Gordon 98.
- Lovell, Bernard and J. A. Clegg (Radio astronomy) 288.
- Low, Francis (Line shape) 276.
- Löwig, Henry F. J. (Freely generated algebras) 17.
- Luke, Y. L. s. M. A. Dengler 95.
- Luzin (Lusin), N. N. (Arbeiten zur Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen) 170.
- Lyerly, Samuel B. (Average Spearman rank correlation coefficient) 376.
- Macbeath, A. M. (Non-homogeneous lattices) 165.
- MacDonald, D. K. C. (Information theory) 369; (Metals at low temperatures) 439.
- MacLane, G. R. (Sequences of derivatives) 56. — Saunders (Cohomology theory of Abelian groups) 14.
- MacNerney, J. S. (Halfbounded matrices) 87.
- Macy, Spencer (Nucleon-nucleon scattering) 278.
- Maeda, F. (Kontinuierliche Geometrie) 16; (Matroid lattices) 17; (Direct sums of lattices) 380; (Continuous regular rings) 380.
- Maitland, Francis s. Henri Poincaré 291.
- Majumdar, R. C. and A. N. Mitra (Damping on radiative corrections to electron scattering) 276.
- Makar, Ragy H. (Puissances fractionnaires de bases de polynômes) 170.
- Malecki, I. (Method of electro-mechanical analogies) 212.
- Malécot, G. (Processus stochastiques) 368.
- Malkin, I. G. (Charakteristische Zahlen) 343.
- Malliavin, Paul (Analyse spectrale) 356.
- Malmheden, Harry (Cauchy's problem for Maxwell's equations) 349.
- Malmquist, Johannes, Valdemar Stenström und Sture Danielson (Mathematische Analysis. I — III.) 315.
- Malvano, R. s. A. Gamba 140.
- Malyšev, A. V. (Darstellung großer Zahlen) 163.
- Mambriani, Antonio (Equazioni alle derivate parziali) 74.
- Manacorda, Tristano (Moto di un corpo) 246.
- Mancill, Julian D. (Unilateral variations) 196.
- Mandelbrojt, S. (Théorèmes d'unicité) 43.
- Manfredi, Bianca (Propagazione del calore) 264.
- Mangeron, D. I. (Problème des spectres) 348.
- Mann, Henry B. (Estimation of parameters) 373.
- Manwell, A. R. (Flow problems. II.) 352.
- Manukjan, A. Ch. (Torsion eines Stabes) 249; (Torsion eines prismatischen Stabes) 249.
- March, N. H. (Electron distribution in benzene) 431.
- Marchionna, Ermanno (Curve e varietà di diramazione) 388; (Varietà intersezioni complete) 388.
- Marczewski, Edward (Théorème ergodique) 42.
- Mařík, Jan (Réductibilité du déterminant) 153; („Integration in Euclidean spaces“) 167.
- Marinescu, G. (Espaces vectoriels ordonnés) 294.
- Markov, A. A. (Algorithmen) 151, 293.
- Marković, D. (Zéros réels) 296.
- Markovitch, D. (Plus grand commun diviseur de polynômes) 296.
- Markus, L. (Escape times for differential equations) 345.

- Markušević, A. I. s. P. S. Alexandroff 33.
- Markwald, Werner (Konstruktive Wohlordnungen) 316.
- Marquet, Simone (Équations de Boltzmann généralisées) 261.
- Marshak, Robert E. (Meson physics) 139.
- Martin, M. H. s. J. B. Diaz 348.
- W. T. s. S. Bochner 64, 65.
- Marussi, Antonio (Coordinate intrinseche della geodesia) 288.
- Masotti, Arnaldo (Matteo Ricci) 5; (Moti kepleriani) 247.
- Massau, Junius (Intégration graphique) 91.
- Massera, J. L. (Stabilität von Homöomorphismen) 89.
- Massey, W. S. (Algebraic topology. I—V.) 240.
- Masuyama, Motosaburo (Sampling surveys in Japan) 219; (Biometry in Japan) 377.
- Mathematical tables. X. Bessel functions. II. 362.
- Matschinski, Matthias (Processus stochastiques) 217.
- Matsumoto, Makoto (Class number of embedding) 237.
- Matsusaka, Teruhisa (Picard variety. II.) 228.
- Matusita, Kameo (Statistical decision functions) 101.
- and Hirotugu Akaike (Decision problem) 101.
- Matyáš, Zdeněk (Energy levels of electrons) 287.
- Mautner, F. I. (Induced representations) 357.
- Mazzoni, Pacifico (Rendite continue) 105.
- McAllister, B. L. and C. J. Thorne (Reverse differential equations) 68.
- McDonald, Janet (Davis's canonical pencils of lines) 115.
- McGill, William J. s. George A. Miller 378.
- McKinsey, J. C. C. (Theory of games) 95.
- Medgyessy, Pál (Planche de Galton) 219.
- Meister, Fr. (Magische Quadrate) 311.
- Meixner, J. s. Arnold Sommerfeld 260.
- Mejman, N. (Analytische Funktionen) 173.
- Mejzler, D. G. (Aufgabe von B. V. Gnedenko) 216.
- — —, O. S. Parasjuk und E. L. Rvačeva (Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung) 216.
- Menon, P. Kesava s. Kesava Menon, P. 313.
- Meňšov, D. (Partialsummen trigonometrischer Reihen) 48.
- Mercier, A. (Traité de mathématique. II.) 315.
- Meredith, G. P. (Epistemic relations) 293.
- Mergeljan, S. N. (Gleichmäßige Annäherungen von Funktionen einer komplexen Veränderlichen) 327.
- Meščerskij, I. V. (Mechanik) 426.
- Messel, H. (Nucleon cascade theory) 279.
- — — and R. B. Potts (Finite absorber for nucleon cascades) 279; (Fluctuation problem) 279.
- — — s. H. S. Green 279.
- Metelicyñ, I. I. (Bewegung eines Automobils) 247.
- Michlin, S. G. (Minimumproblem) 205.
- Middleton, W. E. Knowles (Vision through atmosphere) 425.
- Midzuno, Hiroshi (Sampling system) 219.
- Mihailescu, T. (Directrices Wilczynski) 392.
- Mikolás, Miklós (Formule d'Euler-Mac-Laurin) 53.
- Millás Vallicrosa, José Maria (R. Abraham bar Hiyya ha-Bargeloni) 3.
- Miller, George A. (Finite Markov processes) 378.
- — — and William J. McGill (Statistical description of verbal learning) 378.
- J. C. P. s. W. G. Bickley 94.
- Kenneth S. and Menahem M. Schiffer (Green's functions) 188.
- Mil'man, D. (Integraldarstellungen) 86.
- Minakshisundaram, S. (Zeta functions) 171.
- Minasjan, R. S. (Wärmeströmung) 263; (Temperaturverteilung) 421.
- Minkevič, M. I. (Integraltrichter bei dynamischen Systemen) 209.
- Minorsky, N. (Méthode stroboscopique) 187.
- Mira Fernandes, A. De (Serie di Fourier) 55; (Funzioni pseudo-monogenee) 64; (Grandezze pseudo-estensoriali) 113.
- Miranda, C. (Sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari) 350.
- Mises, R. v. (Network methods in conformal mapping) 335.
- — — von s. P. P. Gillis 213.
- Misès, Richard de (Fonctions statistiques) 363.
- Mishra, R. S. (Congruence of curves) 118; ( $(M-N)$  congruences of curves) 118.
- Mišik, Ladislav (Space of polynomials) 200.
- Mitchell, Josephine (Kernel function) 10.
- Mitra, A. N. s. R. C. Majumdar 276.
- B. N. (Flexure of an isotropic elastic cylinder) 249.
- Miyazaki, Hiroshi (Paracompactness of CW-complexes) 125.
- Moessner, Alfred (Zahlentheoretische Untersuchungen) 311.
- Mogi, Isamu (Recurrent curvature spaces) 393.
- Mohanty, R. (Absolute Cesàro summability) 323.
- Mohr, Ernst (Tschebyscheffsche Polynome) 51.
- Moiseev, N. N. (Pendel) 246; (Starrer Körper) 406; (Schwingungen eines Gefäßes mit Flüssigkeit) 419.
- Moisil, Gr. C. (Équations aux dérivées partielles) 73; (Formule de moyennes) 338.
- Møller, C. s. P. Kristensen 207.
- Moneta, J. (Récurrence transfinie) 35.
- Montgomery, Deane (Finite-dimensional groups) 15.
- — — and Leo Zippin (Small subgroups of finite-dimensional groups) 301.
- Montroll, Elliott W. and Gordon F. Newell (Separation performance of cascades. I.) 421.
- Moody, Ernest A. and Marshall Clagett (edited by) (Medieval science of weights) 145.
- Moór, Arthur (Généralisation du scalaire de courbure) 235; (Oskulierende Punkträume) 237.
- Moore, L. L. (Laminar boundary-layer equations) 132.
- Moppert, C. F. (Cardano's formula) 295.
- Moreau, Jean s. André Delachet 405.
- Morgantini, Edmondo (Triangoli del piano proiettivo



- complesso) 383; (Analisi diofantica) 387.
- Mori, Akira s. Yûsaku Komatu 63.
- Sh. (Multiplikationsringe) 20; (Ringe mit Teilerkettenbedingung) 158.
- Moriguti, Sigeiti (Probability moment of distribution) 363.
- Morinaga, Kakutarô and Takayuki Nônô (Linearization of a form) 25.
- Morita, Kiiti (Bicompactifications of semibicompact spaces) 398.
- Morrey jr., Charles B. (Problem of Plateau) 234.
- Morse, Marston (Regular orientable manifolds) 125; (Variational theory in the large) 197.
- Moses, L. E. (Two-sample test) 100.
- Mostow, G. D. ( $L^2$ -space) 358.
- Mott, N. F. (Wave mechanics) 138; (Electron theory of metals) 439.
- Motzkin, T. S. and I. J. Schoenberg (Entire functions) 66.
- Mugibayashi, Nobumichi s. Masaaki Kawaguchi 275.
- Mukherji, Bhola Nath s. Hari Das Bagchi 51.
- Müller, Claus (Beugung elektromagnetischer Schwingungen) 424; (Theorie elektromagnetischer Schwingungen) 425.
- Hans Robert (Strahlgewinde) 233; (Satz von Malus und Dupin) 233; (Bewegungsvorgänge) 238.
- Müller, R. und E. Ruch (Elektromagnetische Eigenschwingungen) 425.
- Murakami, Shingo and Morikuni Gotô (Compact group) 302.
- Murnaghan, F. D. (Poincaré polynomials) 14; (Representations) 301.
- Muzikář, Čestmír (Electromagnetic waves) 269.
- and Václav Votruba (Decay of  $\mu$ -mesons) 276.
- Myhill, John (Finitary metalanguage) 149; (Hypothesis that all classes are nameable) 149.
- Myrberg, P. J. (Automorphe Thetafunktionen) 340.
- Nabeya, Seiji (Absolute moments) 96.
- Nagabhushanam, K. (Stationary time series) 373.
- Nagata, Masayoshi (Nil-algebras) 24; (Groups with involutions) 156.
- Nair, U. S. (Index of approximation) 220.
- Najmark, M. A. s. I. M. Gel'fand 358.
- Nakada, Osamu (Abelian semigroups. II.) 298.
- Nakamori, Kanzi s. Yukio Suyama 92.
- Nakamura, Masahiro and Takasi Turumaru (Representations of positive definite functions) 201.
- Nakano, Noboru (Fundamentalsatz der Idealtheorie) 159.
- Shigeo (Group varieties) 387.
- Nakayama, Tadasu (Double-modules) 21; (Galois theory) 22; (Structural theory of rings) 159.
- Nasu, Yasuo (Non Euclidean geometry) 121.
- Natucci, Alpinolo (Proiettività) 383.
- Neal, B. G. s. P. S. Symonds 256.
- Nedoma, Jiří (Sequences of measures) 166.
- Nehari, Zeev (Kernel function and conformal maps) 176; (Weighted kernels) 176.
- Néron, André (Rang d'une courbe algébrique) 308.
- Neugebauer, O. (Exact sciences in antiquity) 2.
- Neumann, B. H. and Hanna Neumann (Endomorphisms of groups) 154.
- Hanna s. B. H. Neumann 154.
- Nevanlinna, Rolf (Surfaces de Riemann ouvertes) 178.
- Newell, Gordon F. s. Elliott W. Montroll 421.
- Neyman, Jerzy (Mathematical statistics and probability) 98.
- Niculescu, Miron (Analyse du plan) 168.
- Nicosia, Francesco M. (Capitali accumulati) 106.
- Nijenhuis, Albert (Geometric object) 229.
- Nikolenko, V. N. (Integro-differentialgleichung) 80.
- Nikol'skij, S. M. (Ungleichungen für ganze Funktionen endlicher Ordnung) 323.
- Nilson, E. N. s. J. L. Walsh 172.
- Nitsche, Joachim (Lineares elliptisches Differentialgleichungssystem) 190; (Quasi-
- lineare elliptische Differentialgleichungssysteme) 190.
- Nitta, Isamu s. Yoshiharu Okaya 437, 438.
- Noi, Salvatore Di (Congruenze sulla retta) 107; (Significato proiettivo della distanza) 107.
- Nollet, Louis (Variétés algébriques) 383.
- Nônô, Takayuki s. Kakutarô Morinaga 25.
- Norden, A. P. (Polare Normalisierung) 120; (Nichteuclidische Geometrie) 290.
- Northcott, D. G. (Geometric quotient rings) 160.
- Nowiński, Jerzy (Thin-walled beams) 249; (Thin-walled tubes) 409.
- Obálth, Richard (Radicaux) 163.
- Obrechhoff, Nikola (Limites pour les dérivées des fonctions) 45.
- Oda, Nobuo s. Naomi Shôno 277.
- Ogawa, Junjiro (Systematic statistics. II.) 101; (Sampling distribution) 104.
- Ôhási, Yosio (Bending of a thin elliptic plate) 410.
- Ohgane, Masayoshi s. Kentaro Yano 235.
- Ohkuma, Tadashi (Discrete homogeneous chains) 39.
- Okaya, Yoshiharu and Isamu Nitta (Structure-factor inequalities) 437; (Application of inequality methods to centrosymmetric crystals) 437; (Remarks on B. S. Magdoff's paper) 438.
- Ôkubo, H. (Aeolotropic circular disk) 252.
- Olejník, O. A. (Gleichungen vom elliptischen Typus) 76.
- Oliveira, J. Tiago De s. Tiago De Oliveira, J. 100, 101, 215.
- F. Veiga de s. Veiga de Oliveira, F. 72.
- Olum, Paul (Obstructions) 129.
- Olver, F. W. J. (Asymptotic expansions for Bessel functions) 326.
- Oniašvili (Oniašvilli), O. D. (Kritische Kräfte für Stabilitätsverluste zylindrischer Schalen) 250; (Stability of a cylindrical shell) 250.
- Ono, Isao s. Shigeo Ozaki 337.
- Onoyama, Takuji (Random variables) 367; (Random frequency process) 369.

- Ore, Oystein (Chinese remainder theorem) 310.
- Oreškin, P. T. (Magnetisierung bei elastischer Kompression) 439.
- Orgeval, Bernard d' (Surfaces algébriques de genre géométrique  $p_g = 1$ ) 388.
- Orloff, Constantin P. (Équations différentielles partielles) 190.
- Ortiz Fornaguera, R. (Kanonischer Formalismus) 390; (Lokalisierbare dynamische Systeme) 428.
- Orús, Juan J. de (Dynamik der Sternsysteme) 288.
- Osipovskij, Timofej Fedorovič (Raum und Zeit) 4; (Dynamisches System Kants) 4.
- Oster, Gerald and D. P. Riley (Scattering from symmetric systems) 435.
- Ostrowski, A. M. (Analogue of Theodorsen's and Garrick's method) 334; (Convergence of Theodorsen's and Garrick's method) 334.
- Otsuki, Tominosuke (Boundary value problem of systems of paths) 70.
- Ottaviani, Giuseppe (Convergenza uniforme) 42; (Riasscurazione) 106.
- Overbeek, J. Th. G. s. W. T. van Est 282.
- Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi (Function-theoretic identities of continuous mappings) 337, 338; (Properties in matrix space) 339.
- — — and Isao Ono (Pseudo-meromorphic functions) 337.
- — — and Mitsuru Ozawa (Pseudo-meromorphic mappings on Riemann surfaces) 337.
- Ozawa, Mitsuru (Functions of bounded Dirichlet integral) 176.
- — — s. Shigeo Ozaki 337.
- Pack, D. C. (Hodograph methods in gas dynamics) 136.
- Padmavally, K. (Rational numbers) 39.
- Pailloux, Henri (Membranes rigides) 407.
- Pál, Sándor (Transmission d'une charge statique) 266.
- Panferov, V. M. (Elastoplastische Deformationen) 411.
- Pannenberg, A. E. (Scattering matrix of symmetrical waveguide junctions) 423, 424.
- Pannwitz, Erika (Freie Abbildung) 403.
- Panov, D. Ju. (Mechanische Quadraturformel) 360.
- Parasjuk, O. S. s. D. G. Mejzler 216.
- Paria, Gunadhar (Stresses in a plate) 252.
- Parkes, E. W. (Stress distribution) 409.
- Parreau, Michel (Fonctions harmoniques) 178.
- Pastor, Julio Rey s. Rey Pastor, Julio 34.
- Pastori, Maria (Calcolo tensoriale) 112.
- Paterson, S. (Slowly convergent series) 322.
- Pati, T. (Conjugate series of a Fourier series) 48; (Absolute Riesz summability) 323.
- Patnaik, P. B. (Significance of standardised mean) 371.
- Patterson, A. L. (Orthogonal unit vector triplet) 436.
- Pavljučuk, A. K. s. N. G. Čudakov 313.
- Pekar, S. I. (Lumineszenz und Lichtabsorption) 286.
- Pelaez, J. Gil s. Gil Pelaez, J. 225.
- Pennington, W. B. (Abel's method of summation) 44.
- Pepinsky, Ray (edited by) (X ray crystal analysis) 433.
- Pereira Coelho, Renato (Regular spaces) 124.
- Permutti, Rodolfo (Catene di gruppi semplici) 300.
- Perucca, Eligio (Sistemi MKSA) 242.
- Peters, Werner (Hertzsche Theorie über Berührung fester Körper) 411.
- Peterson, K. (Verbiegung von Flächen) 115.
- Petracca, Antonio und Beppo Levi (Mehrdeutige Funktion) 54.
- Petrescu, St. (Espaces à connexion projective  $P_2$ ) 120.
- Peyovitch, T. (Solutions asymptotiques) 344.
- Pfluger, Albert s. Joseph Hersch 63.
- Phloras, Milt. (Guichardsche Systeme) 392.
- Pi Calleja, Pedro (Begriff der physikalischen Größe) 405.
- — — s. Julio Rey Pastor 34.
- Pignedoli, Antonio (Problemi della fisica nucleare) 277.
- Pil'čak, B. Ju. (Aufgabenkalkül) 150.
- Piranian, G., C. J. Titus and G. S. Young (Conformal mappings) 54.
- — — s. V. F. Cowling 54.
- — — s. A. J. Lohwater 177.
- Pisanelli, Domingos (Folge von Potenzen) 46.
- Pistoia, A. (Teoremi tauberiani) 81.
- Pistolesi, Enrico (Portanza in corrente supersonica) 259.
- Placker, L. and W. J. Wray jr. (Computer) 94.
- Plackett, R. L. and P. S. Hewlett (Mixtures of poisons) 104.
- Plainevaux, J. E. (Équations différentielles) 68.
- Plans Sanz de Bremond, Antonio (Beschränkte Matrizen) 87; (Lineare Algebra im Bereich beschränkter Matrizen) 208.
- Plithides, C. G. (Parabolic case of partial differential equations) 349.
- Plumlee, Lynnette B. (Effect of difficulty and chance success on item-test correlation) 375.
- Pogorzelski, W. (Noyau singulier fermé) 79; (Équations intégrales) 80; (Équation des télégraphistes) 189; (Champ électromagnétique) 267.
- Poincaré, Henri (Science and method) 291; (Science and hypothesis) 291; (Oeuvres. VII. VIII.) 441.
- Poirier, R. (Logique) 243.
- Poitou, Georges et Roger Descombes (Problèmes d'approximation) 314.
- — — s. Roger Descombes 314.
- Polievktov-Nikoladze, N. M. (Einfangen eines Photons) 276.
- Poljachov, N. N. (Druckverteilung) 132; (Strömung um Gitter) 418.
- Polovin, R. V. s. A. I. Achiezer 432.
- Položij, G. N. (Verlagerung von Randpunkten) 61; (Aufgaben der ebenen Elastizitätstheorie) 254.
- Polubarinova-Kočina, P. Ja. (Bewegung des Grundwassers) 136.
- Polvani, Giovanni (Metrologia fisica) 292.
- Pólya, G. (Plausible reasoning) 291; (Problème d'algèbre) 297.

- Pontryagin, L. S. (Combinatorial topology) 399.
- Pople, J. A. s. A. Brickstock 431.
- Popler, J. A. s. Sir John Leonard-Jones 143.
- Popović, Božidar (Mouvement des planètes) 288.
- Popovici, A. (Théorie des constantes physiques) 405; (Équations unitaires de la gravitation) 427.
- C. (Stabilité pondérée) 247.
- Popoviciu, Tiberiu (Dérivation numérique. I.) 210.
- Popp, Simona (Compressibilité dans le problème de Helmholtz) 258.
- Poritsky, H. (Conformal mapping) 177.
- Pöschl, Theodor (Beispiele aus Mechanik) 420.
- Potjagajlo, D. B. (Meromorphe Funktionen) 174.
- Potts, R. B. s. H. Messel 279.
- Potugina, I. V. (Ungerade schlichte Funktionen) 60.
- Prachar, K. (Primzahl Differenzen. I. II.) 163.
- Pradillo, Julio García s. García Pradillo, Julio 319.
- Prager, William (Plasticity) 256.
- Pratelli, Aldo M. (Tensori spazio-temporali di Hertz e di Riesz) 266.
- Predonzan, Arno (Sistemi di  $S_k$ ) 112.
- Prékopa, András (Poisson distributions. IV.) 218; (Calcul des probabilités) 219.
- Prigogine, I. s. P. P. Gillis 213.
- Primrose, E. J. F. (Balanced incomplete block designs) 99.
- Proc. Internat. Congr. Math. Cambridge, I. II. 1.
- Nat. Bureau Standards Symposium (Gravity waves) 443.
- Prochorov, Ju. V. (Verschärfungen eines Satzes von Ljapunov) 215.
- Prodi, Giovanni (Equazioni alle derivate parziali) 75.
- Prokof'ev, A. N. (Gleichung  $X^n = 1$  in einer Gruppe) 157.
- Prokopov, V. K. (Elastizitätstheorie) 410.
- Prosciutto, Aristide (Ingrannaggi per assi sghembi) 390.
- Prudnikov, V. E. (T. F. Osipovskij) 4.
- Puig Adam, P. (Planung von elektronischen Rechenströmen) 94.
- Putnam, Calvin R. and Aurel Wintner (Orthogonal group in Hilbert space) 355.
- Pvačeva, E. L. (Abweichung zwischen empirischen Verteilungen) 371.
- Pyarelal and P. L. Bhatnagar (Energy levels of hydrogen atom) 430.
- Quenouille, M. M. (Associated measurements) 98.
- Qvist, B. (Curves in a finite plane) 108.
- Rachajsky, B. (Caractéristiques pour les équations aux dérivées partielles) 189.
- Rachmanov, B. N. (Schlichte Funktionen) 174.
- Rademacher, Hans (Additive algebraic number theory) 162.
- Radhakrishna Rao, C. s. Rao, C. Radhakrishna 101, 102, 220, 221.
- Radicati, L. A. s. A. Gamba 140.
- Radó, T. s. L. Cesari 40.
- Rai, T. (Additive theory of numbers. II.) 163.
- Rainich, G. Y. (Ternary relations) 106.
- Rainville, Earl D. s. William N. Huff 325.
- Raj, Des (Bessel function population) 97.
- Rajagopal, C. T. (Tauberian theorems) 322.
- Ramakrishna, B. S. s. V. R. Thiruvengkatachar 263.
- Raney, George N. (Complete lattices) 303.
- Rankin, R. A. (Scalar product of modular forms) 339.
- Rao, C. Radhakrishna (Minimum variance estimation) 101, 102; (Approach to factorial experiments) 220; (Wilks'  $\lambda$  criterion) 221.
- K. S. (Hotelling's  $t^2$ ) 221.
- Rapoport, I. M. (Angenäherte Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen) 360.
- Raševskij, P. K. s. F. B. Kagan 380.
- Ray, M. (Liquid flowing over infinite plate) 133.
- Rayski, Jerzy (Non-local quantum electrodynamics) 277.
- Rédei, L. (Vollidealringe. I.) 21; (Waringsche Formel) 296.
- Reeb, G. ( $X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$ ) 185; (Trajectoires de la dynamique) 185; (Géodésiques d'un espace de Finsler) 235.
- Reeb, G. s. Wen-Tsun Wu 126.
- Reeves, Roy F. (Force fields) 246.
- Reissner, Eric (Stress strain relation) 251.
- Rellich, Franz (Störungstheorie der Spektralzerlegung) 90.
- Rembs, Eduard (Verbiegungstheorie) 391.
- Renggli, Heinz (Représentation conforme) 332.
- Rényi, A. and P. Turán (Zeros of polynomials) 11.
- Alfred (Compresseurs et réservoirs d'air) 218; (Traité de P. Gombás) 281; (Stochastic independence) 367; (Conjecture of H. Steinhaus) 367.
- et Tibor Szentmártony (Besoin d'énergie électrique) 218.
- et Lajos Takács (Processus d'événements) 217.
- Review of Electronic Digital Computers, AIEE-IRE-Computer Conference. Philadelphia 1951. 93.
- Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja und César A. Trejo (Analysis. I.) 34.
- Rham, Georges de (Intégrales harmoniques) 118.
- Ribeiro, Hugo (Boolean algebras) 158.
- de Albuquerque, José (Projective Mengen. I. II.) 40; (Ensembles criblés) 317.
- Ribenboim, Paulo (Modules sur un anneau de Dedekind) 160.
- Richardson, L. F. (Eddy-diffusion) 261.
- Riesz, Frigyes (Ensembles de mesure nulle) 316.
- Marcel (Potentiel retardé) 349.
- Riley, D. P. s. Gerald Oster 435.
- Ringel, Gerhard (Farbensatz) 130.
- Riseman, Jacob (Small-angle X-ray scattering) 435.
- Robbins, Herbert (Design of experiments) 370.
- Robinson, Abraham (Symbolic logic) 148.
- Robl, Hermann (Compton-Streuung) 276.
- Robson, D. S. and A. J. King (Sampling of attributes) 221.
- Rocard, Y. (Thermodynamique) 260.



- Rochlin, V. A. (Charakteristische Zyklen von Pontrjagin) 401.
- Rodeja F., E. G. s. E. Vidal Abascal 115.
- Rodionov, K. P. s. S. V. Vonskovskij 439.
- Rogers, Robert A. (Dynamic effects in rotor blade bending) 418.
- Roglić, Velimir (Condition de Saint-Venant) 272.
- Romaña, M. Sage de (Weierstraßsches Konvergenzkriterium) 43.
- Rome, A. (Eclipse of the sun) 4.
- Roquette, Peter (Automorphismengruppe) 308.
- Rosati, Mario (Gruppi finiti di omografie appartenenti ad una varietà di Picard) 386.
- Rose, Alan (Sheffer functions) 147; (Calculus of non-contradiction) 147; (Degré de saturation) 147; (Theorems of Schmidt and McKinsey. I.) 148.
- I. H. (Cohomology theory) 306.
- Rosenbloom, P. C. (Dirichlet problem) 91.
- Rosina, B. A. (Superficie algebriche) 112.
- Ross, Ian C. and Frank Harary (Redundancies in sociometric chains) 378.
- Rossinskij, S. D. (Verbiegung von Flächen) 115.
- Roth, H. s. D. C. Pack 136.
- Leonard ( $V_3$  algebriche) 388.
- Millu (Directions envelopantes) 236.
- Rothé, Edmond et J.-P. Rothé (Prospection géophysique. I. II.) 443.
- J.-P. s. Edmond Rothé 443.
- Rothstein, Wolfgang (Verteilungen meromorpher Ortsfunktionen) 339.
- Roy, J. (Likelihood criteria) 221.
- S. N. (Statistical inference) 99.
- Royden, H. L. (Harmonic functions) 178.
- Rozenberg, M. D. (Filtration einer gasdurchsetzten Flüssigkeit) 260.
- Rozental', I. L. (Kaskadenprozesse) 279.
- Rozov, V. M. und E. A. Chmel'nickij (Envelope von Wahrscheinlichkeitsprozessen) 365.
- Ruch, E. s. R. Müller 425.
- Ruchadze, A. K. (Verbiegung von Balken) 409; (Dehnung von Balken) 409.
- Rumer, Ju. B. (Wirkung als Raumkoordinate. VI.) 139; (VII.) 274.
- Rund, Hanno (Hamiltonsche Funktion) 393.
- Rushton, S. (Tests of equality of variances) 371; (Sequential  $t$ -test) 372.
- Russek, Arnold and Larry Spruch (Interaction moment contributions) 141.
- Russell, Bertrand s. Henri Poincaré 291.
- Rutishauser, Heinz (Automatische Rechenplanfertigung) 212.
- Ruwisch, Erich (Elementar-Mathematik) 315.
- Rvačeva, E. L. s. D. G. Meizler 216.
- Rybkin, G. F. (Lobačevskij) 290.
- Ryžanov, S. G. (Schwere Kerne) 142.
- Sade, Albert (Quasigroupes) 2.
- Sadler, D. H. s. W. G. Bickley 94.
- Šafarevič, I. R. (Reziprozitätsgesetz) 28.
- Sage de Romaña, M. s. Romaña, M. Sage de 43.
- Sagomonjan, A. Ja. (Bewegung einer Flüssigkeit) 74.
- Sakata, Shoichi, Hiroomi Umezawa and Susumu Kamefuchi (Interaction of elementary particles. I.) 275.
- Sakellariou, Nilos (C. Carathéodory) 291; (Strahlensysteme) 391.
- Sakurai, Kiichi (Graphical method for applying Harker-Kasper inequalities) 438; (Harker-Kasper inequality and Okaya-Nitta inequalities) 438.
- Salam, Abdus (Nuclear theory) 140.
- Salechov, G. S. und V. R. Fridlender (Zum Cauchy-Kowalevskischen Problem inverser Probleme) 191.
- Salenius, Tauno (Geschlossene Räume) 226.
- Salini, Ugo (Calotte superficiali) 392.
- Salvadori, M. G. (Numerical methods in engineering) 359.
- Salzmann, Fritz (Wärmespannungen und -deformationen) 255.
- Sampford, M. R. (Response-time distributions. I. II.) 105.
- Samuel, P. (Powers of ideals) 23.
- San Juan, Ricardo (Séries divergentes) 56; (Radiale Fortsetzung) 56; (Ableitung asymptotischer Potenzreihen) 324.
- — Llosá, Ricardo (Divergente Reihen. V. VI.) 55.
- Sandler, Joseph (Facilitating the rotation of factor axes) 374.
- Sanin, A. A. s. T. A. Sanina 261.
- Sanina, T. A., A. A. Sanin und A. M. Titov (Körper im korpuskularen Strahlungsstrom) 261.
- Sansone, Giovanni (Equazione integrale di F. P. Cantelli) 197.
- Santaló, L. A. (Sets of geodesics) 238; (Integral geometry) 238; (Über Halbkugel erstreckte Mittelwerte) 397.
- Sanz de Bremond, Antonio Plans s. Plans Sanz de Bremond, Antonio 87, 208.
- Šapiro, I. S. (Transformations-eigenschaften von Wellenfunktionen) 274.
- Z. Ja. s. I. M. Gel'fand 157.
- Šapošnikov, I. G. und Z. A. Gol'dberg (Schallabsorption) 257.
- Šarangija, A. F. (Verbiegung eines Balkens) 409.
- Sarantopoulos, Spyridon B. (Nuclei of contour integrals) 342.
- Sargent, W. L. C. (Infinite integrals) 45.
- Sarkar, B. N. (Graduation of birth rates) 225.
- Sarmanov, O. V. (Funktionale Momente einer symmetrischen Korrelation) 224; (Funktionale Elemente einer asymmetrischen Korrelation) 224.
- Sarton, George (History of science) 289.
- Sasaki, Usa (Axiom of continuous geometry) 381.
- — and Shigeru Fujiwara (Matroid lattices) 17; (Partition lattices) 17.
- Sasayama, Hiroyoshi (Differential forms on manifolds) 231.
- Satake, Ichiro (Ramification) 307.

- See, Michele ( $r$  birapporti di  $r + 3$  punti) 107.
- Schaeffer, A. C. and D. C. Spencer (Simply connected domains) 60; (Schlicht functions) 60.
- — — s. R. J. Duffin 324.
- Schäfer, Friedrich Wilhelm (Parameterabhängigkeit beim Anfangswertproblem für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen) 341.
- Schagen, P., H. Bruining and J. C. Francken (Electrostatic electron-optical system) 425.
- Scheffé, Henry (Paired comparison) 99.
- Schelling, Hermann von (Most frequent particle paths) 369.
- Schiffer, M. and D. C. Spencer (Multiply connected domains) 175.
- — — s. S. Bergman 64, 176.
- Menahem (Conformal mapping) 60.
- — — M. s. Kenneth S. Miller 188.
- Schindler, Johann Jakob (Stützfunktion) 232.
- Schlögl, F. ( $F_2$ -Bindung) 430.
- Schmidt, Jürgen (Transfinite Schlußweisen) 166.
- Olaf (Computation of  $\alpha$ -harmonic) 289.
- Schneider, H. (Normal matrices) 152.
- Schoenberg, I. J. (Inner-product spaces) 83; (Smoothing operations) 361.
- — — s. Michael Aissen 172.
- — — s. T. S. Motzkin 66.
- Scholten, C. S. (Ein- oder Mehr-Adressenkode?) 94.
- Schönberg, M. (Classical statistical mechanics) 262.
- Schouten, J. P. and H. W. F. van 't Groenewout (Distortion in pulse-code modulation systems) 269.
- Schröder, Kurt (Biharmonische Funktionen) 77.
- Schwarz, Maria Josepha de (Equazioni differenziali ordinarie) 187.
- Sechler, Ernest E. (Elasticity) 248.
- Seely, Samuel s. Wilbur R. LePage 268.
- Segal, I. E. (Lie groups) 357.
- Segre, Beniamino (Algebraic varieties) 110; (Dilatazione nel campo analitico) 384.
- Seibert, Peter (Flächenbau und Wertverteilung) 179.
- Seidel, W. (Bibliography of numerical methods) 335.
- Seidel, W. and R. E. Marshak (Neutron density in Milne's problem) 278.
- — — s. L. S. Pontryagin 399.
- Sekar, C. Chandra s. Chandra Sekar, C. 46.
- Sekerž-Zeňkovič, Ja. I. (Dreidimensionale stehende Wellen) 420.
- Selberg, Atle (General sieve-method) 311.
- Selection of tables for use in calculations of compressible airflow 133.
- Seman, O. I. (Aberrationen von elektronenoptischen Systemen) 425.
- Semendiaev, K. A. (Roots of matrices) 91.
- Sémirot, P. s. Henri Poincaré 441.
- Sen, D. K. and V. B. Kamath (Statics and dynamics) 407.
- Sengupta, H. M. (Bending of elastic plate. III.) 252.
- N. D. (Equation of electron in field of electromagnetic radiation) 276; (Scattering of waves by free electron. II.) 276.
- Serebrjakov, B. G. (Summationssätze) 322.
- Šeremet'ev, M. P. (Gleichgewicht einer Membran) 253.
- Serman, D. I. (Spannungen in Halbebene) 410.
- Serre, Jean-Pierre s. Henri Cartan 401.
- Serrin, James (Hydrodynamic comparison) 416.
- jr., James B. (Hydrodynamical problems) 415; (Free boundary problems) 416.
- Sestini, Giorgio (Problema di Stefan) 264.
- Severi, Francesco (Complementi bibliografici) 384.
- Sextl, Theodor (Fermische Streulänge) 278.
- Sharma, A. (Zeros of a certain polynomial) 295.
- Shibata, Takashi (Fundamental group of transformations) 272; (Lorentz transformations) 272.
- Shiffman, Max (Effective determination of conformal mapping) 177.
- Shimoda, Isae (General analysis. I.) 355.
- Shimura, Gorô (Frobeniusean algebra) 25.
- Shoda, Kenjiro (Algebraische Erweiterungen) 159; (Abelsche Gruppen mit Operatoren) 300.
- Shoenberg, D. (Superconductivity) 144.
- Shôno, Naomi and Nobuo Oda (Non-local interaction) 277.
- Sibirani, Filippo (Problema di Neumann) 194.
- Sichel, Herbert S. (Selective efficiency of a test battery) 374.
- Siegel, C. L. (Himmelsmechanik) 441.
- Laurence and Edward E. Cureton (Biserial correlations) 374.
- Sierpinski, W. (Nombres premiers) 31.
- Signorini, Antonio (Moti rigidi sferici) 245.
- Silin, V. P. (Anregungsspektrum eines Elektronen- und Ionensystems) 439; (Anregungsspektrum eines Mehrteilchensystems) 439.
- — — s. Ju. L. Klimontovič 287, 439.
- Šilov, G. E. (Homogene Funktionenringe) 84.
- Silva Dias, C. L. de (Topologische Vektorräume) 200.
- Sinclair, Annette (Runge's theorem) 330.
- Singer, I. M. (Representations of Lie groups) 358.
- Singh, Daljit (Numbers  $L(m, n)$ ) 309; (Eulerian and Bernoullian numbers) 309.
- Daroga, s. P. V. Krishna Iyer 372.
- Siraždinov, S. Ch. (Grenzwertsätze für Markovsche Ketten) 366.
- Širokov, Ju. M. (Spin der Teilchen mit Ruhmasse Null) 140.
- Sitenko, A. G. s. A. I. Achiezer 281.
- Sittig, J. (Economic choice of sampling systems) 370.
- Skolem, Th. (Foundation of set theory) 165.
- Slaichert, William Martin (Coefficient of correlation) 224.
- Ślebodziński, W. (Déformations de l'espace) 117.
- Sloovere, Henri de (Nombre d'invariants. I — III.) 348.
- Smirnov, Ju. M. (Bemerkung zu „Metrisierbarkeit topologischer Räume“) 239.
- Smith, P. A. (Set of generators) 125.
- jr., Robert W., Helen E. Edwards and Stuart R. Brinkley jr. (Laminar flow in channels) 95.

- Šmul'jan, Ju. L. (Isometrische Operatoren) 88.
- Snyder, Hartland S. s. Ernest D. Courant 142.
- Sobociński, Bolesław (Partial system of calculus of propositions) 292.
- Sokolnikoff, I. S. (Conformal mapping in the theory of elasticity) 334.
- Sokolov, A. A., N. P. Klepikov und I. M. Ternov (Energieverlust von Elektronen im Magnetfeld) 428.
- Ju. D. (Bewegung eines Systems dreier Massenpunkte) 406.
- N. D. (Schwingungsfrequenzen eines Komplexes) 430; (Wasserstoffbindung) 430.
- Sominskij (Sominski), I. S. (Vollständige Induktion) 315; (Mathematische Induktion) 315.
- Sommerfeld, Arnold (Thermodynamik) 260.
- Sós, Vera (Curves and surfaces which are convex) 238.
- Šostak, R. Ja. (A. V. Letnikov) 5.
- Southwell, Sir Richard (Relaxation method) 335.
- Spampinato, N. (Geometria superiore) 108; (Algebra complesse) 161; (Funzioni totalmente derivabili nelle algebre complesse) 180.
- Spanier, E. H. (Fiber bundles) 126.
- Spasskij, I. G. (Russisches Rechenbrett) 289.
- Spencer, D. C. (Green's operators) 351; (Theorem of Hodge) 351.
- — — s. G. F. D. Duff 189.
- — — s. A. C. Schaeffer 60.
- — — s. M. Schiffer 175.
- Spivak, G. V. und E. L. Stoljarowa (Phasenübergänge) 432.
- Sprague, A. H. (Calculus) 34.
- Spruch, Larry s. Arnold Russek 141.
- Sretenskij, L. N. (Trennungsfläche zweier Flüssigkeitsströme) 132; (Elastische Wellen) 257.
- Staehler, Robert E. (Boolean algebra) 268.
- Stallmann, F. (Kreisbogenpolygone) 337.
- Stamatis, E. (Euklids Geometrie. I. II.) 2.
- Stampacchia, Guido (Funzioni in  $n$  variabili) 168; (Sistemi di equazioni di tipo ellittico) 196.
- Stanley, J. Perham s. J. Douglas Ayers 375.
- Steele, M. C. (Thick-walled cylinder theory) 413.
- Stein, G. M. (Conformal maps of electric fields) 334.
- Marvin L. (Newton's method in complex Banach spaces) 91.
- P. (Characteristic roots of a matrix) 10.
- Štejnberg, N. S. (Interpolation) 53.
- Stenström, Valdemar s. Johannes Malmquist 315.
- Sternberg, Robert L. (Variational methods) 187.
- Stewart, C. A. (Fourier expansions) 170.
- Stoilow, S. (Fonctions analytiques multifformes) 63; (Fondements de l'analyse classiques) 316.
- Simon (Transformations intérieures) 403.
- Štokalo, I. Z. (Symbolische Methode) 344.
- Stoljarowa, E. L. s. G. V. Spivak 432.
- Stoll, R. R. (Linear algebra) 294.
- Stone, A. H. (Supersonic flow. II.) 419.
- M. H. (Theorem of Gelfand-Mazur) 82.
- Stoppelli, Francesco (Effetto giroscopico) 245.
- Storchi, Edoardo
- ( $\arctg m/n = \arctg 1/x + \arctg 1/y$ ) 50; (Statica della membrana) 251.
- Straškevič, A. M. (Relativistische Elektronenoptik elektrostatischer Felder) 426.
- Strassl, Hans (Höhe und Azimut von Gestirnen) 442.
- Stratonovič, R. L. (Wellen im Plasma) 432.
- Štraus, A. V. (Verallgemeinerte Resolventen) 89.
- Straus, E. G. (Functions periodic modulo each of a sequence of integers) 309.
- Strawson, P. F. (Logical theory) 146.
- Strehlke, Karl (Planarkonvexe Bereiche) 396.
- Struktur und Materie der Festkörper 283.
- Stuart, H. A. (Struktur des freien Moleküls) 431.
- Stueckelberg, E. C. G. (Théorème  $H$ ) 262.
- Suddaby, A. s. S. Levine 282.
- Sugawara, Masahiro s. Takeshi Inagaki 239.
- Masao s. Tetsuo Hamada 139.
- Sukhatme, P. V. (Observational errors) 103.
- Šulgin, M. F. (Gewöhnliche Differentialgleichungen) 340.
- Šul'man, T. A. (Asymptotische Transformationen) 392.
- Sunakawa, Sigenobu s. Ryôyû Utiyama 275.
- Sunyer Balaguer, F. (Approximation von Funktionen) 171.
- Surinov, Ju. A. (Strahlungsaustausch) 288.
- Suyama, Yukio und Kanzi Nakamori (Integralgleichung vom Volterraschen Typus) 92.
- Svirskij, I. V. (Genauigkeit der Variationsmethoden) 346; (Methode von Galerkin) 346.
- Svoboda, Antonín (Linear analyser) 213.
- Swift, J. D. ( $n$ -valued propositional calculi) 6.
- Swinford, Lee H. (Approximate method) 334.
- Symonds, P. S. and B. G. Neal (Theory of continuous beams and frames) 256.
- Symposium mathematischer Probleme in Südamerika 1.
- Synthesis of electronic computing 93.
- Sysoev, A. E. (Gewebe-Bindung) 301.
- Szász, O. (Product of summability methods) 44.
- Szegő, G. (Certain set functions) 79; (Contributions of the Hungarian school) 175; (Conformal mapping related to torsional rigidity) 177.
- Székely, Gábor (Nombre de tours le plus efficace des métiers à tisser) 218; (Besoin d'énergie) 218.
- Szele, Tibor (Zerfallungssatz) 20.
- Szentmártony, Tibor s. Alfred Rényi 218.
- Szmydt, Z. (Théorème de M. Knebelman) 118.
- T**aam, Choy-Tak (Non-oscillatory differential equations) 344.
- Table No. 81 of factors for 6-place roots 95; Tabele No. 82 of factors for 5-place roots 95.



- Tables of Chebyshev polynomials 212.
- Tables of Coulomb wave functions. I. 280.
- Tables des fonctions de Legendre associées 362.
- Takács, Lajos (Koinzidenz-Erscheinungen) 98.
- s. Alfred Rényi 217.
- Takayanagi, Kazuo (Atomic collisions) 278.
- Takeda, Gyô (Interaction of electrons and photons) 139.
- Takeno, Hyôitirô (Rotating disk) 273.
- Tallqvist, Hj. (Produktsummen) 294.
- Tamagawa, Tsuneo s. Kenkiti Iwasawa 307, 308.
- Tanaka, Toshio (Factorizations of lattices) 17.
- Tandai, Kwoichi s. Akitsugu Kawaguchi 236.
- Tanikawa, Yasutaka (Superquantization) 140.
- Tarski, Alfred (Border-line of algebra) 7.
- s. Bjarni Jónsson 158.
- Taton, René (Géométrie projective en France) 290.
- Tatuzawa, Tikao (Functional equation for Dirichlet's  $L$ -series) 171.
- Taussky, Olga (Matrices and quadratic fields. II.) 162.
- Tedeschi, Bruno (Sistemi di sconto. I. II.) 105.
- Tellegen, D. H. (Network theorem) 423.
- Teodorescu, N. (Théorie invariante de la propagation des ondes) 423.
- P. P. (Équilibre des surfaces cylindriques) 250; (Relations entre les efforts et les déformations) 413.
- Ter-Stepanjan, G. I. (Flüssigkeit in einem kapillaren System) 260.
- Terada, Fumiuyuki (Principal genus theorem) 307.
- Terleckij, Ja. P. und A. A. Logunov (Verteilungsfunktion der kosmischen Teilchen) 280.
- Ternov, I. M. s. A. A. Sokolov 428.
- Terpstra, T. J. (Confidence interval for probability) 371.
- Thiruvengkatachar, V. R. and B. S. Ramakrishna (Radial and axial heat flow) 263.
- Thom, René (Puissances de Steenrod) 399; (Espaces fibrés) 400.
- Thompson, A. J. (Logarithmetica Britannica. II.) 211.
- s. W. G. Bickley 94.
- Thomson, L. M. (Plane elastic problems) 254.
- Thorne, C. J. s. B. L. McAllister 68.
- Thrall, R. M. (Combinatorial problem) 10.
- Thüring, B. (Librationsbahnen der Trojaner) 441.
- R. (Holditchscher Satz) 114.
- Tiago De Oliveira, J. (Equality of proportions) 100; (Inverse binomial sampling) 101; (Variable aléatoire positive) 215.
- Tibiletti, Cesarina (Sestica con nove cuspidi) 229; (Complementi all'algebra delle treccie caratteristiche) 229.
- Tillmann, Heinz-Günter (Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum) 359.
- Tinbergen, J. (Import and export elasticities) 225.
- Titchmarsh, E. C. (Eigenfunction expansions) 186.
- Titov, A. M. s. T. A. Sanina 261.
- Titus, C. J. s. G. Piranian 54.
- Tjablikov, S. V. (Energiespektrum) 287.
- Toda, Hiroshi (Whitehead products) 129.
- Todeschini, Bartolomeo (Sforzi maxwelliani) 266.
- Togliatti, Eugenio (Geometria intrinseca) 117.
- Tokarev, P. I. (Lagrangesches Variationsproblem) 78.
- Tomita, Takanori (Structure analysis) 284.
- Tonooka, Keinosuke ( $(n-1)$ -ple integral) 119.
- Tonowoka, Keinosuke (Intrinsic theories in manifold of surface-elements) 394.
- Torgerson, Warren S. (Multidimensional scaling. I.) 376.
- Törnebohm, Håkan (Logical analysis of relativity) 292.
- Tornehave, H. (Analytic functions of several variables) 65, 66.
- Tornier, Erhard und Hans Domizlaff (Versuchsvorschriften) 213.
- Toscano, Letterio (Corrispondenza) 63; (Funzioni simmetriche) 297; (Operatori del tipo  $x_1 \partial/\partial x_1 + \dots + x_m \partial/\partial x_m$ ) 359.
- Tóth, László Fejes s. Fejes Tóth, László 396.
- Transue, W. (Teorema di Cinquni) 78.
- Trejo, César A. s. Julio Rey Pastor 34.
- Tricomi, Francesco G. (Funzioni ipergeometriche confluenti) 52; (Statistica matematica) 377.
- Trlifaj, M. s. E. Antončík 286.
- Miroslav (Metallic magnesium) 286.
- Trochimčuk, Ju. Ju. (Folgen von Riemannschen Flächen) 180; (Hebbare Randmengen) 180; (Folgen analytischer Funktionen) 180.
- Trofimov, P. I. (Endliche Gruppe) 13.
- Tschakaloff, Lubomir (Rolle-scher Satz) 320.
- Tsuboi, Tseruo (Abelian factor group) 156.
- s. Shigeo Ozaki 337, 338, 339.
- Tsuboko, Matsuji (Plunging of  $R_2$ ) 121.
- Tsui, Masatsugu (Fuchsian groups) 66.
- Tulcea, C. T. Ionescu s. Ionescu Tulcea, C. T. 318.
- Tumarkin, G. C. (Konvergenzbedingungen) 172.
- Tungl, E. (Stäbe mit  $\tau$ -Querschnitt) 249.
- Turán, P. s. A. Rényi 11.
- Turnbull, H. W. (D'Arcy Wentworth Thompson) 291; (J. Williamson) 291.
- Turumaru, Takasi (Direct-product of operator algebras. I.) 87.
- s. Masahiro Nakamura 201.
- Tutte, W. T. (Factors of graphs) 242.
- Tvermoes, Helge (Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs) 12.
- Tyler, Fred. T. (Multivariate analysis in psychological research) 375.
- Udeschini, Paolo (Spostamento delle righe spettrali) 273.
- Ueno, Yoshio (Uniform flow) 246.
- Ukegawa, Takasaburo s. Keizo Asano 304.
- Ulam, S. (Random processes) 95.
- Ulčar, Jože (Affine Einteilung von Flächen) 108.
- Umegaki, Hisaharu (Decomposition theorems of operator algebra) 206.

- Umezawa, Hiroomi (Interactions of particles. II.) 275.  
 — s. Susumu Kamefuchi 139, 276.  
 — s. Shoichi Sakata 275.
- Unkelbach, Helmut (Kreisbogenpolygone. I. II.) 336;  
 (Konforme Abbildung echter Polygone) 336.
- Urabe, Minoru (Ordinary differential equations) 184; (Decomposition of finite transformation) 209; (Varieties for finite transformation) 209; (Equations of Schröder. II.) 209; (Majorized group of transformations) 210.
- Utiyama, Ryôyû, Sigenobu Sunakam and Tsutomu Imamura (Green-functions) 275.
- Utumi, Yuzo (Complemented modular lattices) 158.
- Vaccà, Maria Teresa (Conduzione del calore) 263.
- Vagner, V. V. (Hyperflächen im zentral-affinen Raume) 116.
- Vajnberg, M. M. (Differential von Funktionalen) 84; (Produkt gewisser Operatoren) 89; (Variationstheorie der Eigenwerte) 198.
- Vallicrosa, José Maria Millás s. Millás Vallicrosa, José Maria 3.
- Vand, V. s. W. Cochran 437.
- Vandiver, H. S. (Associative algebra. I.) 306.
- Varga, Ottó (Normalkoordinaten) 119.
- Varma, K. Bhaskara (Wilks'  $L_{mcc}$  and  $L_{vc}$  criteria) 221.
- Varnavides, P. (Minkowski constant) 312.
- Vasilache, Sergiu (Équation des télégraphistes) 269.
- Vasil'ev, A. M. (W-Kongruenzen) 233.
- Vazsonyi, Andrew (Fluid dynamics) 335.
- Veiga de Oliveira, F. (Charakteristische Exponenten) 72.
- Vekua, N. P. (Randwertproblem) 333.
- Venkatesan, N. S. (Maximum pressure and shot-start-pressure) 408.
- Verbikij, L. L. (Konforme-euklidische Räume) 234.
- Vermes, P. (Summability methods) 44; (Interpolation problem) 170.
- Vernić, Radovan (Restringiertes Dreikörperproblem) 247.
- Vesentini, Edoardo (Omografie definite di elementi differenziali tangenti) 392.
- Vidal Abascal, E. und E. G. Rodeja F. (Kurven auf Flächen konstanter Krümmung) 115.
- Vidav, Ivan (Flächenformel) 320.
- Viguier, G. (Équations du mouvement des fluides visqueux) 417; (Équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique linéaire) 427.
- Viktorovskij, E. E. (Allgemeiner Existenzsatz) 67.
- Villari, Gaetano (Polinomi d'Hermite) 51.
- Vincze, István (Contrôle de qualité industriel) 219; (Coefficient de régression) 224.
- Vinogradov, I. M. (Summe der Werte  $\chi(p+k)$ ) 32.
- Vivier, Marcel (Matrices extérieurement équivalentes) 294.
- Vjatskin, A. Ja. (Resonanzstreuung der Elektronen) 286.
- Vlasov, A. K. (Höhere Mathematik. I. II.) 34.
- Vodička, V. (Conduction de la chaleur) 263.
- Volkovskij, L. I. (Typenproblem) 337; (Riemannsche Fläche) 337.
- Volosov, V. M. (Differentialgleichungen zweiter Ordnung) 186, 346; (Differentialgleichungen höherer Ordnung) 345.
- Vonsovskij, S. V. (Quantentheorie des Ferromagnetismus) 281.  
 — — —, L. Ja. Kobelev und K. P. Rodionov (Galvanomagnetische Erscheinungen) 439.
- Vorob'ev, Ju. V. (Numerische Integration von Gleichungen der mathematischen Physik) 360.
- Voronoj, G. F. (Werke. I. II.) 28.
- Voskresenskij, K. D. (Wärmeleitung) 264.
- Votaw, D. F. (Personnel-classification problems) 379.
- Votruba, Václav (Pair production by gamma-rays) 428.  
 — s. Čestmír Muzikář 276.
- Wada, Hidekazu (Abbildungen vom Komplexen auf reellen projektiven Raum) 129.
- Wahab, J. H. (Legendre polynomials) 296.
- Wahlgren, Agne (Gleichungen) 163.
- Wakakuwa, Hidekiyo (Riemann spaces) 233.
- Wald, Abraham (Statistical decision rules) 100.
- Wallace, A. D. (Mobs) 15.
- Waller, I. and P. O. Fröman (Neutron diffraction. I.) 286.
- Walsh, J. L. (Expansions of functions) 52.  
 — — — and Philip Davis (Interpolation and orthonormal systems) 53.  
 — — — and H. Margaret Elliott (Approximation on Jordan curve) 52.  
 — — — and E. N. Nilson (Overconvergence) 172.
- Wang, Hao (Many-sorted theories) 148; (Negative types) 148; (Irreducibility of impredicative principles) 165.  
 — Hsien-Chung (One-dimensional cohomology group) 239.  
 — M. H. (Orbital electron capture) 141.
- Warschawski, S. E. (Conformal mapping of variable regions) 61.
- Wasiutyński, Z. (Hypothèse de Jacques Bernoulli) 248.
- Wasow, Wolfgang (Metodi probabilistici) 359.
- Watanabe, Hideaki (Uniformisation et séparabilité. II.) 40.
- Waterson, A. ( $r$ -th powers of the first  $n$  integers) 294.
- Watson, Kenneth M. (Final state interactions) 277.
- Weber, C. (Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften) 254.  
 — Ernst (Electromagnetic field problems) 334.  
 — Werner (Dreieckstypen) 108.
- Weibull, I. (Inspection plans) 370.
- Weil, André (Number-theory and algebraic geometry) 28; („Formules explicites“) 32.
- Weinstein, Alexander (Helmholtz problem) 178.
- Weinstock, Robert (Calculus of variations) 195.
- Weisskopf, Victor F. s. John M. Blatt 140.

- Wendel, J. G. (Left centralizers) 357.
- Wever, Franz (Freie Liesche Ringe) 303.
- White, Colin (Test of significance) 100.
- Whitehead, George W. (Homotopy groups of spheres) 241.
- J. H. C. (Algebraic homotopy theory) 241.
- Whitney, A. M. (Totally positive matrices) 171.
- — — s. Michael Aissen 172.
- Hassler ( $r$ -dimensional integration) 41.
- Whittaker, E. T. (Analytical dynamics of particles and rigid bodies) 408.
- Whittle, P. (Tests of fit) 373; (Time series harmonic components and covariance structure) 373.
- Peter (Time series analysis) 373.
- Wiener, Norbert (Prediction theory) 95.
- Wigner, E. P. s. E. İnönü 138.
- Wijngaarden, A. van (Table of integral) 95.
- — — s. L. Kaarsemaker 95.
- Wilder, Raymond L. (Foundations of mathematics) 9.
- Wilkes, M. V. (EDSAC computer) 362.
- Williams, E. J. (Properties of timber) 372.
- — — and N. H. Kloot (Stress-strain relationship) 372.
- Wilson, J. G. (edited by) (Cosmic ray physics) 142.
- Wiman, A. ( $p$ -Gruppen) 156.
- Wintner, Aurel s. Calvin R. Putnam 355.
- Wise, M. E. (Dense random packing of unequal spheres) 397.
- Wiśniewski, F. J. (Diffusion des particules) 284.
- Wittich, Hans (Typenproblem) 63.
- Wolfowitz, J. (Stochastic approximation) 365.
- — s. J. Kiefer 366.
- Wolska, J. (Problème aux limites de H. Poincaré) 194; (Équations intégrales et intégréo-différentielles) 198.
- Worsley, Beatrice H. (Correction terms to values of gravity) 444.
- Wray jr., W. J. s. L. Placker 94.
- Wright, E. M. (Prime number theorem) 164.
- G. H. von s. P. T. Geach 149.
- Wu, Wen-tsün (Puissances de Steenrod) 240.
- Wen-Tsun et Georges Reeb (Espaces fibrés) 126.
- Wuest, W. (Verhalten von Bourdonfedern) 410.
- Yamamoto, T. (Analytical representation of spin) 274.
- Yang, Chung-Tao (Borsuk's problem) 399.
- Yano, Kentaro and Masayoshi Oghane (Field theories) 235.
- Shigeki (Cesàro summability of Fourier series) 323.
- Young, David M. (Conformal mapping to determine flows) 335.
- Young Frederick H. (Fourier coefficients) 49.
- G. S. s. G. Piranian 54.
- Zachariasen, W. H. (Complex crystal structures) 438.
- Zacher, Giovanni ( $t$ -gruppi finiti risolvibili) 300.
- Zadiraka, K. V. (Zweiseitige Approximationen) 71; (Lineare Differentialgleichungen nach S. A. Čaplygin) 185.
- Zagrebin, D. V. (Regularisiertes Geoid) 405.
- Žak, I. E. (Konjugierte Funktionen) 50.
- Zalgaller, V. A. (Kurven mit beschränkter Variation der Windung) 395.
- Zappa, Guido (Omomorfismi dei sottogruppi) 153.
- Zarantonello, Eduardo H. (Equations of flows) 415.
- Zaremba, S. K. (Abelian groups) 155.
- Zariski, Oscar (Abstract algebraic geometry) 227.
- Žarkov, G. F. (Erzeugung von  $\pi$ -Mesonenpaaren) 276.
- Zassenhaus, Hans J. (Theorem of MacLagan-Wedderburn) 160.
- Zerna, W. (Schalentheorie) 250.
- Žgenti, V. S. (Dünne, elastische Kugelschalen) 251.
- Ziamba, St. (Anisotropic friction) 414.
- Zil'berman, A. E. (Elektron im magnetischen Feld) 439.
- Zippin, Leo s. Deane Montgomery 301.
- Zitarosa, Antonio (Elementi neutri del reticolo dei sottogruppi) 154; (Problema misto di Dirichlet-Neumann) 194.
- Zmorovič, V. A. (Variationsprobleme der schlichten Funktionen) 331.
- Zühlke, Marcel (Wirtschaftlich Rechnen) 211.
- Zwinggi, Ernst (Rendite vitalizie e rendite certe) 106.















